РОЗДІЛ 4

ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

УДК 378.531.011 DOI: 10.326626/2307-4507.2020-26.127-129

І. О. Арсенюк

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
e-mail: aio_88@i.ua

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЗАДАЧІ ДВОХ ТІЛ В КУРСІ «КЛАСИЧНА МЕХАНІКА» ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ

У статті подано методику розв'язання задачі двох тіл. У теоретичному відношенні ця задача цікава тим, що на відміну від задачі багатьох тіл допускає повне і точне розв'язання в загальному вигляді, а її практичне значення важко переоцінити: розв'язок задачі двох тіл лежить в основі небесної механіки і теорії вільного руху штучних супутників, в основі класичної теорії зіткнень і розсіяння частинок. Ідеї, використані при розв'язанні класичної задачі двох тіл, є основою для розуміння багатьох важливих задач атомної і молекулярної фізики. Метою статті є деталізоване подання розв'язку задачі, спрямоване на вивчення змісту задачі при дистанційному навчанні студентів.

Ключові слова: задача двох тіл, енергія взаємодії, дистанційне навчання.

Дистанційне навчання у вищому навчальному закладі передбачає взаємодію викладача та студентів між собою на відстані, здійснюване засобами інформаційних та комунікаційних технологій. Така форма навчання дозволяє реалізувати навчальні цілі, застосовувати педагогічні методи, використовувати різні форми організації навчального процесу. Це незалежний від просторового і тимчасового розташування учасників освіти навчальний процес, в якому реалізується засвоєння студентами знань і умінь за допомогою електронних засобів навчання на основі телекомунікаційних та інформаційних технологій.

Зручність дистанційної форми навчання – це навчання в психологічно комфортних, звичних для студента умовах за домашнім комп'ютером, індивідуальні терміни і темп навчання, висока частка самостійності поряд з можливістю в будь-який час отримати допомогу від викладача.

Технології дистанційного навчання дозволяють вирішувати ряд педагогічних завдань:

- створення освітнього простору;
- формування в студентів пізнавальної самостійності та активності;
- розвитку критичного мислення, толерантності, готовності конструктивно обговорювати різні точки зору.

При дистанційному навчанні з'являється потреба в деталізованому поданні матеріалу, для кращого розуміння студентами самостійно. Для прикладу, далі подано детальний опис розв'язку задачі двох тіл.

Задачею двох тіл називають задачу про рух замкнутої механічної системи, що складається з двох частинок, що взаємодіють між собою.

Отже, розглянемо замкнуту систему двох частинок з масами m_1 і m_2; допустимо, що нам відома потенціальна енергія їх взаємодії як функція відносної відстані $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ тобто $U(r)$. У загальному випадку рух системи двох часток, як і будь-якої складнішої механічної системи, складається з руху системи як єдиного цілого і руху частинок щодо їх загального центру мас. Центр мас частинок m_1 і m_2 рухається щодо довільної інерціальної системи відліку K_0 (C-системи) прямолінійно і рівномірно, так що $R_C = 0$.

Звідси видно, що задача двох тіл є, по суті, задача про відносний рух частинок m_1 і m_2, розгляд якого найзручніше вести в C-системі, тобто в рухомій інерціальній системі відліку K'_C, пов'язаній з центром мас частинок m_1 і m_2.

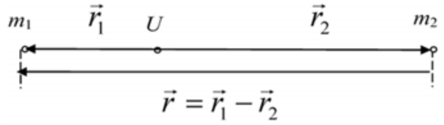

***Рис. 1**. Взаємозв'язок векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ і $\vec{r}$ в системі центру мас*

Позначаючи радіуси-вектори частинок у вказаній системі відліку через $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ (*рис. 1*), диференціальні рівняння руху системи мають вигляд

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}, \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}. \end{cases} \tag{1}$$

Відмітимо, що диференціальні рівняння, що входять в систему (1), є рівняннями з нерозділюваними змінними $\vec{r}_1, \vec{r}_2$; це стає очевидним, якщо записати їх окремо:

$$-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} = \vec{F}_{12}\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right), \quad -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} = \vec{F}_{21}\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right).$$

Основною метою розгляду задачі двох тіл є доказ наступної основоположної теореми: змінні $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ в системі диференціальних рівнянь (1) розділяються, якщо задачу про рух частинок m_1 і m_2 щодо їх загального центру мас *C* звести до еквівалентної задачі про рух деякої фіктивної частинки з масою $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в зовнішньому центральносиметричному полі $U(r)$ *з* центром, що знаходиться в точці *C*.

Для доведення цієї теореми подамо радіуси-вектори частинок $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ як функції вектора $\vec{r}$ (*рис. 1*) $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. З цією метою звернемося до рівнянь, що виходять з визначення вектора $\vec{r}$. Використовуємо основну властивість системи центру мас. Запишемо систему рівнянь (2):

$$\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ &m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Її розв'язок відносно $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, має вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

З визначення вектора $\vec{r}$ витікає також наступна очевидна рівність:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \ \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \tag{4}$$

Підставляючи вирази (3) і (4) в рівняння (1), переконуємося, що кожне з них зводиться до одного і того ж рівняння

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \tag{5}$$

що формально описує рух фіктивної частинки масою μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \tag{6}$$

яку називають *зведеною масою* частинок m_1 і m_2, в зовнішньому по відношенню до неї центральносиметричному полі $U(r)$ *з* центром в точці *C*. Тим самим сформульована вище теорема доведена.

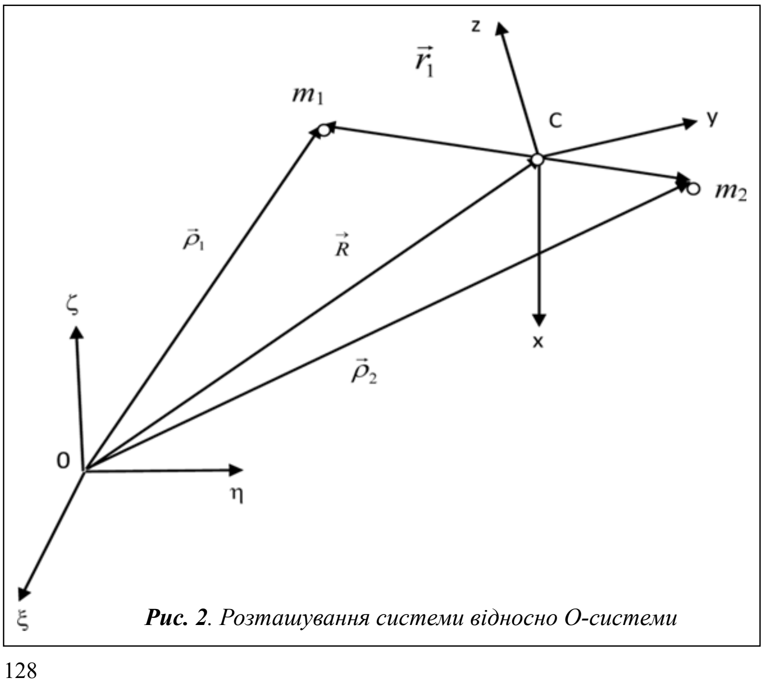

Рис. 2. *Розташування системи відносно О-системи*

Інтегрування рівняння руху (5) для μ-частинки дозволяє знайти закон зміни з часом відносної відстані частинок, тобто вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Користуючись далі співвідношеннями (3), визначимо $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ відносимо *C*-систему можна отримати траєкторії частинок $\vec{r}_1$ і щодо центру мас. З *рис. 2* отримаємо вектори:

$$\vec{\rho}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t) + \vec{R}_{Co},$$

$$\vec{\rho}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t) + \vec{R}_{Co},$$

які визначають рух частинок, у лабораторній системі відліку K_0.

Швидкості $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ реально існуючих частинок m_1 і m_2 пов'язані зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ фіктивної μ-частинки (яку можна приймати і як відносну швидкість частинок m_1 і m_2, що не міняється під час переходу $K_C \to K_0$) зв'язані співвідношеннями:

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{\upsilon}, \ \vec{\upsilon}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{\upsilon}. \tag{7}$$

Співвідношення (7) отримується диференціюванням за часом *t* виразів для $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ (система 3).

Таким чином, задача двох тіл дійсно допускає повне і точне рішення, оскільки вона фактично зводиться до простої динамічної задачі – задачі про рух однієї матеріальної точки.

Оскільки фіктивна μ-частинка рухається в стаціонарному і центральносиметричному полі, її повна енергія E_0 і момент імпульсу $\vec{L}_C$ щодо центру поля, співпадаючого з центром мас частинок m_1 і m_2, зберігаються:

$$E_0 = \frac{\mu \upsilon^2}{2} + U(r) = const, \ \vec{L}_C = \mu[\vec{r} \times \vec{v}] = const. \tag{8}$$

Покажемо, що для системи реально існуючих частинок m_1 і m_2 енергія E_0 є внутрішньою енергією, а вектор $\vec{L}_C$ – *власним механічним моментом.*

Дійсно, згідно визначенням внутрішня енергія і власний механічний момент системи двох частинок рівні:

$$E_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} + U(r) \tag{9}$$

і

$$\vec{L}_C = m_1[\vec{r}_1 \times \vec{\upsilon}_1] + m_2[\vec{r}_2 \times \vec{\upsilon}_2], \tag{10}$$

де $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ і $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ – радіус-вектори і швидкості частинок в *C*-системі. Підставляючи в (9) і (10) вирази (3) і (7) і враховуючи рівність (6), знаходимо:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{m_1 m_2^2 \upsilon^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2 \upsilon^2}{2(m_1 + m_2)^2} + U(r) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \upsilon^2 + U(r) = \frac{\mu \upsilon^2}{2} + U(r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}[\vec{r} \times \vec{\upsilon}] + \\ &+ \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}[\vec{r} \times \vec{\upsilon}] = \mu[\vec{r} \times \vec{\upsilon}]. \end{aligned}$$

Отже, енергія μ-частинки рівна енергії двох реальних частинок, відносно *C*-системи, момент кількості руху

μ-частинки є сума моментів кількості руху реальних частинок, відносно C-системи.

Із співвідношень (3) і (7) неважко побачити, що траєкторії реальних частинок m_1 і m_2, що складають замкнуту систему двох тіл, і фіктивної μ-частинки подібні між собою (причому центром подібності є центр мас частинок m_1 і m_2) і лежать в одній і тій же площині, перпендикулярній до вектора $\vec{L}_C$. Внаслідок закону збереження $\vec{L}_C$ = const вказана площина зберігає незмінну орієнтацію в просторі. Це означає, що якщо фіктивна μ-частинка рухається по еліптичній траєкторії, то і реальні частинки m_1 і m_2 також описують еліптичні орбіти. Така ситуація, наприклад, має місце, якщо взаємодія між частинками носить кулонівський характер, тобто якщо енергія взаємодії частинок:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad (11)$$

де $\alpha = Gm_1m_2$ (гравітаційна взаємодія) або $\alpha = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$ (електростатична взаємодія).

Розглянемо деякі окремі випадки руху системи двох частинок залежно від співвідношення їх мас m_1 і m_2:

1. $m_1 \langle\langle m_2$ (таке співвідношення мас реалізується в системах «планета – Сонце», «водневоподібний атом»). В цьому випадку вирази (3) і (6) для радіусів-векторів і приведеної маси частинок можна приблизно представити у вигляді:

$$\vec{r}_1 \approx \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{r}, \; \vec{r}_2 \approx -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}, \;\; \mu \approx m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right). \qquad (12)$$

У випадку коли $m_2 \to \infty$ $\vec{r}_1 = \vec{r}$, $\vec{r}_2 = 0$, $\mu = m_1$ і, отже, рух в системі двох частинок зводиться до руху легкої частинки m_1 щодо нерухомої (у C-системі) важкої частинки m_2. Ця частинка є центром поля, в якому відбувається рух частинки m_1.

2. $m_1 = m_2 = m$ (таке співвідношення мас реалізується в деяких подвійних зірках, а також в системах «протон – протон», «протон – нейтрон» при зіткненнях). В цьому випадку:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{r}, \; \vec{r}_2 = -\frac{1}{2}\vec{r}, \;\; \mu = \frac{m}{2}.$$

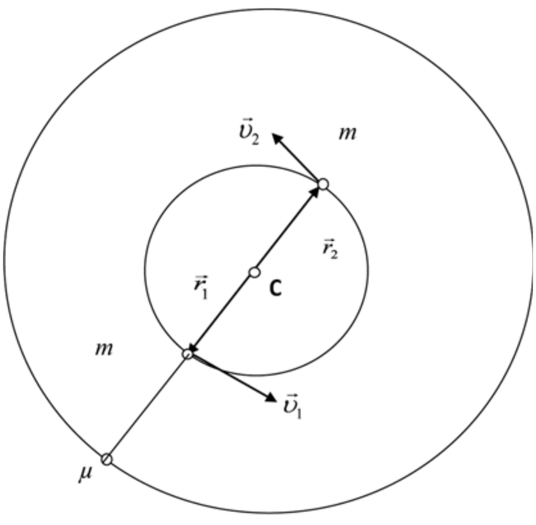

Рис. 3. *Порівняння траєкторії руху μ-частинки з траєкторіями руху реальних частинок m_1 і m_2*

У гравітаційному полі за певних умов (як побачимо пізніше) для фіктивної μ-частинки можливий стійкий рух по круговій орбіті, при цьому реальні частинки є рівними масами рухатимуться по одній і тій же круговій орбіті, як би ганяючись одна за одною (*рис. 3*). Така ситуація, як показують фотометричні дослідження, має місце в подвійній зірці Великої Ведмедиці.

Отже, розв'язання задачі двох тіл зводиться до основної задачі динаміки однієї матеріальної точки:

1. Знаходження траєкторії частинки, та її швидкості по заданому характеру діючої сили.

2. Розв'язання задачі двох тіл використовується в небесній механіці, яка описує рух планет і їх супутників в Сонячній системі, класичній та квантовій механіці.

3. Задача про рух зарядів в центральносиметричному Кулонівському полі нерухомого заряду.

4. Задача корисна з методичної точки зору, як узагальнююча для багатьох типових задач теоретичної фізики.

Можна зробити висновок, що подання деталізованого розв'язання задачі двох тіл, дає можливість студентам краще засвоювати матеріал при дистанційному навчанні.

Список використаних джерел:

1. Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. Класична механіка. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2008. 480 с.
2. Федорченко А.М. Теоретична механіка. Київ : Вища школа, 1975. 516 с.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. Москва : Наука, 1975. 416 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. *Теоретическая физика*. Москва : Физматлит, 2007. Т. 1. 224 с.
5. Жирнов Н.И. Классическая механика. Москва : Просвещение, 1980. 303 с.

I. O. Arsenyuk

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University

METHODIC OF ACTIVITIES OF TWO BUILDING IN THE CLASSICAL MECHANIC COURSE FOR DISTANCE LEARNING

The paper presents the Method of Detailed Presentation of Two-body Caddy Theory solution to the problem of two bodies. In theory, this problem is interesting because, unlike the problem of many bodies, it allows a complete and precise solution in general, and its practical importance is difficult to overestimate: the two-body problem solution is the basis of celestial mechanics and the theory of free motion of artificial satellites, the basis of the classical theory of collisions and scattering of particles. Ideas used in solving the classical two-body problem are the basis for understanding many important atomic and molecular physics problems. The purpose of the article is a detailed presentation of the content of the task in the distance learning of students.

Key words: two-body problem, interaction energy, distance learning.

Отримано: 1.06.2020