УДК 530-029:51 DOI: 10.32626/2307-4507.2021-27.150-153

Г. П. Кобель[1], Н. А. Головіна[2]

Волинський національний університет імені Лесі Українки
e-mail: [1]kobel.grigor@vnu.edu.ua; [2]holovina.nina@ vnu.edu.ua;
ORCID: [1]0000-0002-3774-0032; [2]0000-0002-1152-1536

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ЗАЛЕЖНІСТЬ У ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Розглянули суть числа *e*, продемонстрували його ірраціональність. Зміст числа розкрили через поведінку функції $y = e^x$. Властивості цієї функції є унікальними. Тому що це відображення природного росту довільної величини, визначення швидкості зміни будь якої величини (темпу, площі). Якщо потрібно щось обчислити і ми запишемо вираз через *e,* то математичні обчислення стануть значно простішими. Розглянули приклади задач, процеси у яких описуються експоненціальною залежністю.

У запропонованих задачах проаналізували процеси, у яких швидкість зміни певної фізичної величини (швидкість, сила, тиск, температура, заряд, сила струму) пропорційна миттєвому значенню цієї величини. Наприклад, експоненціальне сповільнення катера під дією сили опору, барометрична формула для ізотермічної атмосфери, швидкість зміни температури тіла, залежність заряду конденсатора від часу. Звернули увагу на загальність підходів. Експоненціальні залежності широко поширені в різних областях природознавства та застосовуються для опису змін у часі різних величин у біології, психології, соціології, економіці, медицині.

Ключові слова: число е, експонента, експоненціальна залежність, швидкість зміни величини, фізичні задачі.

Число *e*. Що таке число *e*? і звідки воно взялося? Нам кожного разу важко згадати чому є так важливим це число, яке дорівнює 2,7182818284590...

Число *e* за визначенням – це границя функції $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$.

x	y	e
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2,25
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	2,3703703702
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	2,488320000
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	2,5937424601
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2,7048138294
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2,7169239322
∞	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2,7182818284590

Метою роботи є: проаналізувати процеси, у яких швидкість зміни певної фізичної величини (швидкість, сила, тиск, температура, заряд, сила струму) пропорційна миттєвому значенню цієї величини. Наголосити на унікальності та загальності цієї властивості.

Завдання роботи:

– розглянути суть числа *e*, продемонструвати його ірраціональність;
– розкрити зміст числа через поведінку функції $y = e^x$;
– розглянути приклади фізичних задач, процеси у яких описуються експоненціальною залежністю та проаналізувати їх.

Проблема числа *e* у тому, що воно не визначається геометрично. Це константа, яка пов’язана з ростом, темпом чогось. Ейлер знайшов формулу, згідно якої стало зрозуміло, що це ірраціональне число:

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+}}}}}}}}$$

Оскільки дріб нескінченний, то це значить, що число ірраціональне.

Для визначення самого значення числа Ейлер використав формулу:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.$$

Зміст числа розкривається у поведінці функції $y = e^x$, що має унікальну властивість, яку можна зобразити графічно (див. *рис. 1*).

У точці 0 функція приймає значення $e^0 = 1$. Якщо провести дотичну в точці $x = 0$, то вона пройде до осі абсцис під кутом з тангенсом 1 (у світлому трикутнику відношення протилежного катета 1 до прилеглого 1 дорівнює 1). У точці $x = 1$ функція приймає значення $e^1 = e$. Якщо провести дотичну в точці $x = 1$, то вона пройде під кутом з тангенсом *e* (у темному трикутнику відношення протилежного катета *e* до прилеглого 1 дорівнює *e*). У точці $x = 2$ значення e^2 функції знову збігається з тангенсом кута нахилу дотичної до неї. Через це, заодно, самі дотичні перетинають вісь абсцис рівно в точках –1, 0, 1, 2 і т.д.

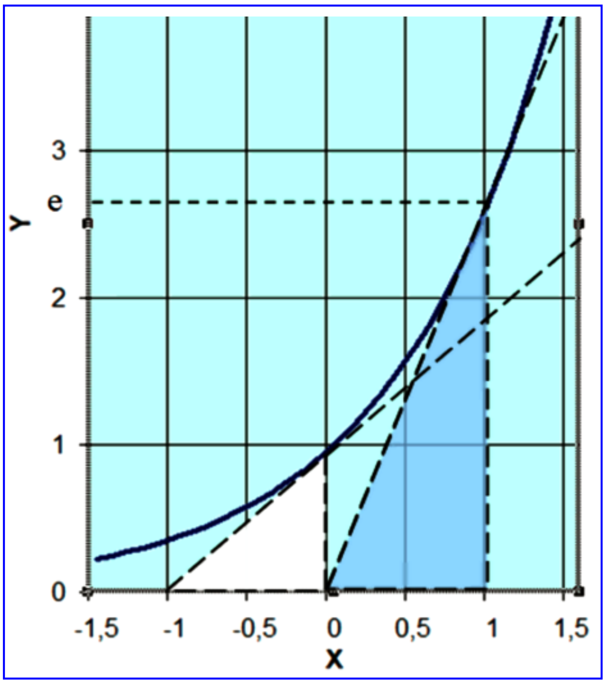


Рис. 1. *До розуміння властивостей функції* $y = e^x$

Серед усіх функцій $y = a^x$ саме функція $y = e^x$ – єдина, яка володіє такою красою, що тангенс кута її нахилу в кожній її точці збігається зі значенням самої функції. Значить, за визначенням значення цієї функції в кожній точці збігається зі значенням її похідної в цій точці: $(e^x)' = e^x$. Чомусь саме число *e* = 2,7182818284590... потрібно піднімати до різних степенів, щоб вийшла така картинка. Саме в цьому, на нашу думку, і складається сенс числа *e*.

Отже, число є унікальним:

- яку б точку не вибрати на осі *x*, значення функції у цій точці дорівнює e^x;
- тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції у вибраній точці, тобто похідна, теж дорівнює e^x;
- площа криволінійного трикутника під графіком кривої теж чисельно дорівнює e^x.

Це єдина функція з такими властивостями.

Чому число *e* важливе?

Тому що це відображення природного росту довільної величини.

У точці *x* = 1 значення функції рівне *e*. І це стає вигідно для обчислень, стає природною мовою обчислень. Обчислення – це визначення швидкості зміни будь якої величини (темпу, площі). Якщо потрібно щось обчислити і ми запишемо вираз через *e,* то математичні обчислення стануть значно простішими. У іншому разі потрібно було б використати якісь константи та досить сильно заплутати обчислення.

e знамените об'єднанням усіх відомих констант в одній формулі, формулі Ейлера: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Розглянемо приклади задач, процеси у яких описуються експоненціальною залежністю. Відмітимо, що фізичні системи, поведінка яких описується експонентою, здатні проявляти й періодичну – синусоїдну поведінку [3]. Експонента та синусоїда мають одну загальну важливу властивість симетрії, що встановлює зв'язок між формою самої кривої та формою кривої, що описує кут нахилу дотичної до неї. Цей зв'язок між функціями повністю проявляється в теорії комплексних чисел: коли *x* – квадратний корінь із негативного числа, а *exp x* стає сумішшю двох: синусоїдної та косинусоїдної хвиль:

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t,$$

де ω – частота коливань.

Задача. Катер в озері розвинув швидкість υ_0. За яким законом буде зменшуватися швидкість катера після вимикання двигуна, якщо сила опору пропорційна швидкості катера? Скільки часу буде рухатися катер до зупинки? Який шлях він пройде при цьому? [2, с. 17].

Розв'язування: Катер сповільнюється лише під дією сили опору середовища. Запишемо закон руху: $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = -r\upsilon$. Маємо диференціальне рівняння для функції $\upsilon(t)$. Розділимо змінні

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{r}{m}dt \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int_0^t\left(-\frac{r}{m}\right)dt, \quad \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\frac{r}{m}t.$$

Тоді $\upsilon = \upsilon_0\, e^{-\frac{r}{m}t}$. Швидкість катера спочатку швидко зменшується, а потім все повільніше і прямує до нуля асимптотично. Отже, теоретично час гальмування до зупинки нескінченно великий. Ефективну тривалість процесу експоненціального сповільнення прийнято характеризувати часом релаксації τ, протягом якого величина зменшується в *e* разів $\tau = \dfrac{m}{r}$. Знайдемо залежність координати катера від часу:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0\, e^{-\frac{r}{m}t}, \quad dx = \upsilon_0\, e^{-\frac{r}{m}t}dt.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$x - x_0 = \frac{m\upsilon_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right)dt.$$

Шлях, який пройде катер до зупинки $S = \dfrac{m\upsilon_0}{r}$ і є скінченною величиною.

Задача. Через циліндричний стержень перекинута нитка, до одного з кінців якої прив'язаний вантаж. До другого кінця нитки прикладають силу *F*, з допомогою якої вантаж повільно рівномірно піднімають. Встановіть залежність між силою *F* і кутом φ охоплення циліндра ниткою (*рис. 2а*). За отриманими даними визначте коефіцієнт тертя між ниткою та циліндром.

Розв'язування:

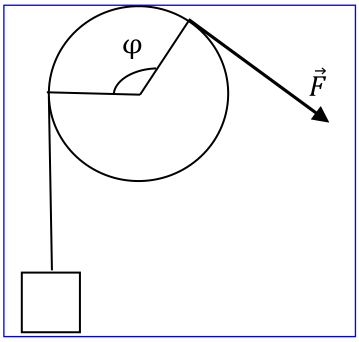
Дослідимо теоретично залежність $F = f(\varphi)$. Виділимо невеличку ділянку нитки dl, яка стягує невеликий кут $d\varphi$. Сила натягу нитки збільшується за рахунок збільшення сили тертя: $dF = dF_{\partial} = \mu\cdot dN$. З *рисунка 2б* видно, що реакція опори рівна:

$$dN \approx 2F\sin\frac{d\varphi}{2} \approx F\cdot d\varphi.$$

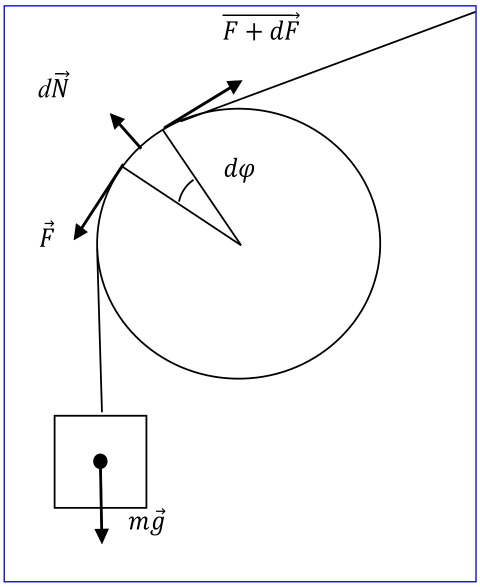
При цьому ми враховуємо, що $dF << F$. Отже, $dF = F\mu d\varphi$. Звідки: $\dfrac{dF}{F} = \mu d\varphi$. Інтегруємо останнє рівняння:

$$\int_{mg}^{F}\frac{dF}{F} = \int_0^{\varphi}\mu d\varphi, \quad ln\frac{F}{mg} = \mu\varphi.$$

Звідки $\dfrac{F}{mg} = e^{\mu\varphi}$. $\quad F = mge^{\mu\varphi}$.



а)



б)

Рис. 2

Задача. За яким законом зменшується атмосферний тиск із висотою у межах тропосфери. Температуру вважати сталою.

Зміна тиску $dp=-\rho g dh.$ Розглянемо ізотермічну модель атмосфери. Густину повітря знаходимо із рівняння Менделеєва-Клапейрона:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT_0}.$$

Тоді

$$dp=-\frac{pMg}{RT_0}dh,\ \frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT_0}dh.$$

Інтегруємо останнє рівняння, вважаючи температуру T_0, прискорення вільного падіння g і молярну масу повітря атмосфери M сталими величинами по всій висоті. Отримуємо барометричну формулу для ізотермічної атмосфери:

$$p=p_0e^{-\frac{Mgh}{RT_0}}.$$

Задача. Тіло, температура якого в початковий момент часу дорівнює T_0, помістили в середовище з незмінною температурою T_1. Як змінюватиметься з часом температура тіла?

Розв'язування: Як відомо, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою, до якої нагріте тіло, і температурою навколишнього середовища. Позначимо температуру тіла в деякий момент часу через $T(t)$. Тоді швидкість зміни температури за часом є похідна. Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою тіла T і температурою навколишнього середовища T_1, то одержимо рівняння

$$\frac{dT}{dt}=-\gamma\left(T-T_1\right),$$

де γ – коефіцієнт пропорційності. Отримали диференціальне рівняння із невідомою функцією T. Розділимо змінні

$$\frac{dT}{T-T_1}=-\gamma dt,\ \int_{T_0}^{T}\frac{d\left(T-T_1\right)}{T-T_1}=\int_0^t\left(-\gamma\right)dt,\ \ln\frac{T-T_1}{T_0-T_1}=-\gamma t,$$

$$\frac{T-T_1}{T_0-T_1}=e^{-\gamma t},\ T-T_1=\left(T_0-T_1\right)e^{-\gamma t}.$$

Остаточно $T=T_1+\left(T_0-T_1\right)e^{-\gamma t}$.

Задача. Конденсатор ємністю C і резистор R послідовно приєднують до джерела постійної напруги U_0. Скільки часу буде заряджатися конденсатор (*рис. 3*). Знайти залежність заряду на обкладці конденсатора від часу.

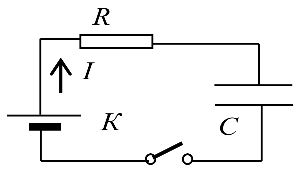


Рис. 3

Розв'язування: Після замикання ключа K у колі виникає струм і конденсатор починає заряджатися. Процес заряджання конденсатора триватиме доти, поки напруга на конденсаторі не стане рівна напрузі джерела U_0.

Позначимо заряд верхньої пластини q. Швидкість зміни заряду на верхній пластині визначає силу струму в колі

$$I=\frac{dq}{dt}. \qquad (1)$$

Сума спадів напруг на резисторі та конденсаторі рівна напрузі джерела. $U_R+U_C=U_0$. Або $IR+\frac{q}{C}=U_0$.

Враховуючи (1):

$$\frac{dq}{dt}R+\frac{q}{C}=U_0. \qquad (2)$$

На пластинах повністю зарядженого конденсатора зосереджений заряд q_0. Тоді $U_0=\frac{q_0}{C}$. Рівняння (2) набуває вигляду:

$$\frac{dq}{dt}R+\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C},\ \frac{dq}{q_0-q}=\frac{1}{RC}dt,\ \frac{d\left(q_0-q\right)}{q_0-q}=-\frac{1}{RC}dt.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$\int_0^q\frac{d\left(q_0-q\right)}{q_0-q}=-\int_0^t\frac{1}{RC}dt,\ \ln\left(q_0-q\right)\Big|_0^q=-\frac{1}{RC}dt.$$

Тоді шукана залежність заряду конденсатора від часу:

$$q=q_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Знайдена залежність заряду конденсатора від часу дозволяє знайти залежність сили струму в колі при заряджанні конденсатора:

$$I=\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Аналогічно можна розглянути процес розрядки конденсатора через резистор. Залежність заряду на обкладці конденсатора від часу матиме вигляд:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Час релаксації τ, протягом якого значення заряду зменшується в e разів $\tau = RC$.

Висновки. Розглянули суть числа e, продемонстрували його ірраціональність. Розкрили зміст числа через поведінку функції $y = e^x$. Розглянули приклади фізичних задач, процеси у яких описуються експоненціальною залежністю та проаналізували їх. Відмітимо також, що такі залежності зустрічаються не лише у фізиці. Експоненціальні залежності широко поширені в різних областях природознавства і застосовуються для опису змін у часі різних величин у біології, психології, соціології, економіці, медицині. Як наприклад, швидкість поділу бактерій пропорційна кількості бактерій N у даний момент часу t.

Список використаних джерел:

1. Кобель Г.П., Гоцик І.А. Експериментальне вивчення тертя. *Науковий часопис Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи* : збірник наукових праць / за заг. ред. проф. В.Д. Сиротюка. Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. Вип. 48. С. 69-72.
2. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие для вузов. В трех частях. Ч. 1: Механика. Термодинамика и молекулярная физика / под ред. В.А. Овчинкина. Москва: Изд-во МФТИ, 2002. 448 с.
3. Єлізаров О.І, Сукачов О.В., Закатнов М.В. Експонента та сутність описаних нею фізичних явищ. *Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського. Природничі науки*. 2008. Вип. 5 (52). Ч. 1. С. 50-54.

Gregoryi Kobel, Nina Holovina

Volyn Lesya Ukrainka National University

EXPONENTIAL DEPENDENCE IN PHYSICAL PROBLEMS

The essence of the number is considered, while its irrationality is demonstrated. The meaning of the number was revealed through the behaviour of the function $y = e^x$. The properties of this function are unique, since it is a reflection of the natural growth of arbitrary value, determining the rate of change of any value (rate, area). If it is necessary to calculate something and we write the expression through e, then the mathematical calculations will be much simpler. Examples of problems in which processes are described by exponential dependence are considered.

In the proposed problems we analyzed the processes in which the rate of change of a certain physical quantity (speed, force, pressure, temperature, charge, current) is proportional to the instantaneous value of this quantity. For example, the exponential deceleration of the boat under the action of the resistance force, the barometric formula for the isothermal atmosphere, the rate of change of body temperature, the dependence of the capacitor charge on time. Attention was drawn to the generality of approaches. Exponential dependencies are widespread in various fields of natural science and are used to describe changes over time of various quantities in biology, psychology, sociology, economics, medicine.

Key words: number e, exponent, exponential dependence, rate of change of magnitude, physical problems.

Отримано: 23.09.2021

УДК 78.147:371.134:53:004.92:004.55 DOI: 10.32626/2307-4507.2021-27.153-159

А. М. Кух[1], О. М. Кух[2]

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

e-mail: [1]kukh@i.ua, [2]omk15@i.ua; ORCID: [1]0000-0002-7865-4704, [2]0000-0001-9103-1272

STEM: СВІТОГЛЯД І ПРИРОДНИЧО-НАУКОВА КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Інноваційною технологією природничо-математичної освіти є STEM, що формує логічне мислення, технічну грамотність, вирішення проблемних питань, оволодіння цифровими технологіями. Головна мета впровадження STEM-освіти полягає в реалізації державної політики щодо посилення розвитку науково-технічного напряму в навчально-методичній діяльності на всіх рівнях. На основі визначення копетентностей, що формуються інформаційно-освітнім середовищем STEM-освіти сформовано компетентнісну модель майбутнього фахівця STEM-освіти, визначено її результати, зміст практичної та дослідницької діяльності. Середовищно-компетентнісний підхід може стати основою для визначення стандартів STEM-освіти на змістовому і матеріально-технічному рівні.

Ключові слова: компетентність, інформаційно-освітнє середовище, природничо-наукова компетентність, STEM.

Розвиток природничо-математичної освіти в Україні пов'язаний із інноваційною системою навчання STEM, яка покликана забезпечити в учнів та студентів формування інтегрованих знань про природу, сформувати інноваційне мислення та технічну грамотність, запропонувати алгоритми розв'язку прикладних задач природничих наук, чіткі схеми вирішення проблемних питань в оволодінні інноваційними технологіями, тощо. Така широта STEM підходу вимагає формування і відповідних світоглядних категорій. Світогляд, як відомо, це система уявлень про світ і про місце в ньому людини, про відношення людини до дійсності, що оточує його, і до самого себе, а також обумовлені цими представленнями основні життєві позиції і установки людей. Світогляд – категорія освітня, інтегральна, що синтезує різні аспекти знань, діяльності, відношень, узагальнень тощо. У ньому принципово важливим є зв'язок його компонентів, їх "сплав" (компонентами його є образи, уявлення, раціональні поняття, емоційні переживання, цінності, вольові установки, різнорідні "блоки" знань, настроїв, прагнень, надій), що з'являється як більш менш цілісне розуміння