УДК 517.5 DOI: 10.32626/2307-4507.2021-27.165-167

О. І. Радзієвська[1], І. Б. Ковальська[2]

[1] Національний університет харчових технологій
[2] Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
e-mail: [2]ir-kov@ukr.net

ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У статті розглядаються питання використання ряду та формули Тейлора для розв'язування деяких типів фізичних задач, які зустрічаються при вивченні курсу загальної фізики.

Також ці задачі можна розглядати, як ілюстрацію застосування формули Тейлора при вивченні курсу математичного аналізу на фізичних спеціальностях.

Формула Тейлора для функцій є однією з вершин класичного аналізу завдяки численним застосуванням її для обчислення границь функцій, дослідження їх екстремумів, точок перегину, інтервалів опуклості та вгнутості, збіжності рядів та інтегралів, оцінки швидкості їх збіжності чи розбіжності і т.д.

Також формула Тейлора досить широко використовується і в фізичних дослідженнях, зокрема, коли потрібно визначити поведінку функції, що описує деякий процес, при тих чи інших значеннях аргументу чи оцінити похибку, отриману при заміні значення функції деяким многочленом. Можна навести ще цілий ряд прикладів використання формули Тейлора: для знаходження кінематичних характеристик руху тіл, дослідження характеру руху тіл при заданому законі руху, визначення якісної поведінки розглядуваних фізичних величин в граничних випадках та діючих на тіло сил при заданому законі руху і т. д.

Ключові слова: формула Тейлора, залишковий член, фізичні задачі, рух тіла, диференційовані функції, енергія частинки.

Вступ. Формула Тейлора для функцій є однією з вершин класичного аналізу завдяки численним застосуванням її для обчислення границь функцій, дослідження їх екстремумів, точок перегину, інтервалів опуклості та вгнутості, збіжності рядів та інтегралів, оцінки швидкості їх збіжності чи розбіжності і т.д.

Також формула Тейлора досить часто використовується і в фізичних дослідженнях, зокрема, коли потрібно визначити поведінку функції, що описує деякий процес, при тих чи інших значеннях аргументу чи оцінити похибку, отриману при заміні значення функції деяким многочленом.

Основна мета при викладанні цієї теми в курсі матаналізу – не тільки навчити студентів автоматично розвивати функції в ряди чи оцінювати залишки цих рядів, а й виробити навички застосовувати ці поняття для розв'язування практичних задач, зокрема тих, які зустрічаються при вивченні курсу загальної фізики.

1. Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ (див., наприклад [1]) має в деякому δ-околі точки a похідну порядку $n+1$ (n – довільний фіксований номер). Тоді для довільної точки x з цього $\delta(a)$ і $\forall p>0$ буде існувати таке число $\theta \in (0;1)$, що справджується формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \tag{1}$$

де $R_{n+1}(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\cdot p}f^{n+1}\left(a+\theta(x-a)\right)$ – залишковий член формули Тейлора у формі Шльомильха-Роша.

Він може бути записаний і в інших формах – Лагранжа, Коші або Пеано. Форми Лагранжа (при $p=n+1$) і Коші (при $p=1$) зазвичай використовуються, коли потрібно при тих чи інших значеннях x, відмінних від a, наближено обчислити функцію $f(x)$. Можна наближено замінити $f(x)$ многочленом $\varphi(x, a)$ і чисельно оцінити отриману при цьому похибку.

Якщо ж нас цікавить лише порядок похибки відносно малої величини $(x-a)$, тоді використовуємо залишковий член у формі Пеано:

$$R_{n+1}(x)=o(x-a)^n.$$

Часто записують формулу Тейлора (1) в дещо іншому вигляді. Позначимо $a=x_0$, $x-a=\Delta x$. Взявши $p=n+1$ (форма Лагранжа), отримаємо:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \left(\theta\in(0,1)\right).$$

Якщо для функції $f(x)$ в деякому δ-околі нуля похідні всіх порядків обмежені $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, то

$$\left|R_{n+1}(x)\right|\le\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Звідси слідує, що взявши достатньо великий номер $n\in N$, ми можемо зробити $R_{n+1}(x)$ як завгодно малим і отримати довільну наперед задану точність наближення.

2. Використання формули Тейлора при розв'язуванні фізичних задач

Для прикладу розглянемо вираз для енергії частинки, що використовується в спеціальній теорії відносності [2]:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{\nu^2}{c^2}}},$$

де m – маса частинки, c – швидкість світла, ν – швидкість частинки.

У повсякденному житті ми маємо справу із швидкостями, що значно менший за швидкість світла. Тому відношення ν^2/c^2 можна вважати нескінченно малим і $\left|\nu^2/c^2\right|<1$.

Отримаєм перше наближення точної формули для енергії по квадрату швидкості частинки. Використаємо ряд Тейлора для функції $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, де $|x|<1$, $\alpha \in R$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...$$

Якщо α = –1/2, то при першому наближенні $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$, тобто

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x.$$

Підставляємо сюди $x=-\dfrac{v^2}{c^2}$ і знаходимо:

$$E=mc^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\approx mc^2\cdot\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)=mc^2+\frac{mv^2}{2}.$$

Звертаємо увагу, що другий доданок – це звичайна кінетична енергія тіла.

Можна навести ще один приклад дослідження коливань математичного маятника. Так називається підвішена на довгій нерозтяжній нитці матеріальна точка. Щоб краще описати поведінку цієї системи, будемо уявляти тіло масою m, що висить на пружині з жорсткістю k. Нехай коливання здійснюються вздовж осі OX, тоді енергія цього маятника

$$E=\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2.$$

З цього рівняння може бути визначена залежність координати тіла від часу $x=x(t)$. Невідома функція $x(t)$ в даному рівнянні знаходиться під знаком похідної. Такі рівняння називаються диференціальними.

Розв'яжемо його. Перепишемо рівняння у вигляді $m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+kx^2=2E$. Звідси $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=\dfrac{2E}{m}-\dfrac{kx^2}{m}$, тобто $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{\dfrac{2E}{m}\left(1-\dfrac{k}{2E}x^2\right)}$. Отримаємо диференційне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-\dfrac{k}{2E}x^2}}=\sqrt{\frac{2E}{m}}dt.$$

Проінтегруємо його, зробивши підстановку

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos u.$$

Отримуємо

$$-\sqrt{\frac{2E}{k}}u=\sqrt{\frac{2E}{m}}t+c \quad \text{або}$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x(t)=\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{2E}}\left(\frac{2E}{m}t+c\right)\right).$$

Знаходимо функцію

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\varphi_0\right),$$

де $\varphi_0=-\sqrt{\dfrac{k}{2E}}\,c$ – довільна стала.

Перетворимо цей вираз. Нехай координата $x = 0$ відповідає стану рівноваги маятника. Коли відхилення маятника від стану рівноваги максимальне (позначимо його A), то його швидкість рівна нулю.

Отже в крайньому положенні $E=1/2\cdot kA^2$. А оскільки енергія зберігається, то це значення енергії не змінюється з часом

$$x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right).$$

Звідси легко отримати частоту коливань маятника: $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

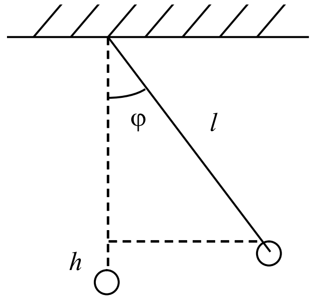

Рис. 1

Для математичного маятника природно вибрати за координату кут відхилення від вертикалі φ (*рис. 1*). Запишемо вираз для енергії маятника.

Коливаючись, матеріальна точка рухається по дузі кола. Як відомо, при русі точки по колу радіуса r її лінійна швидкість v зв'язана з кутовою швидкістю ω простим співвідношенням $v=\omega\cdot r$.

Але $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$, тому кінетична енергія маятника

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}v^2=\frac{m}{2}(\omega\cdot r)^2=\frac{m}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

де l – довжина нитки.

Щоб записати потенціальну енергію, потрібно вибрати рівень, на якому вона буде рівна нулю. Нехай це буде рівень стану рівноваги маятника. Потенціальна енергія в полі тяжіння визначається висотою тіла над вибраним «нульовим» рівнем $U=mgh$.

В нашому випадку $h=l-l\cos\varphi$,

$$U=mg(l-l\cos\varphi)=mgl(1-\cos\varphi)=$$

$$=mgl\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Повна енергія

$$E=\frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Якщо спробувати розв'язати це диференційне рівняння, то простий розв'язок, як у випадку пружинного маятника, не вийде. Але можна дещо спростити, якщо припустити, що здійснювані коливання малі, тобто кут відхилення маятника від положення рівноваги φ = 1. Тоді можна наближено вважати, що $\sin\dfrac{\varphi}{2}\approx\dfrac{\varphi}{2}$ і вираз для енергії буде мати вигляд:

$$E=\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+2mgl\varphi^2.$$

Якщо порівняти цей вираз з енергією пружинного маятника, то можна зразу написати залежність $\varphi=\varphi(t)$ за аналогією:

$$\varphi(t)=\varphi_{\max}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\alpha_0\right),$$

де α_0 – довільна стала.

Частота коливань $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Точна залежність $\varphi=\varphi(t)$ як і частота коливань, записується за допомогою значно складнішої функції.

Крім знаходження кінематичних характеристик руху тіл можна навести ще цілий ряд прикладів використання формули Тейлора: досліджувати характер руху тіл при заданому законі руху, визначати якісну поведінку розглядуваних фізичних величин в граничних випадках, визначати діючі на тіло сили при заданому законі руху і т.д.

Список використаних джерел:

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник для студентів фіз.-мат. факультетів педагогічних інститутів. Київ: Вища школа, 1990. Ч. 1: Функції однієї змінної. 383 с.
2. Загородний В.В. Загальна фізика. Механіка. Київ: НТУУ «КПУ», 2016. 363 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. Москва: Наука, 1972. Т. 2. 560 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Москва: Наука, 1989. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. 352 с.

Olena Radziyevska[1], Iryina Kovalska[2]

[1]*National University of Food Technology*
[2]*Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University*

THE USE OF THE TAYLOR FORMULA FOR THE SOLVING PHYSICS PROBLEMS

The article discusses the issues of the using the Taylor's series and formula for the solving some types of physical problems encountered in the study of a course in general physics.

Also, these tasks can be considered as an illustration of the use of the Taylor formula when studying a course in mathematical analy sis for physical specialties.

Taylor's formula for functions is one of the pinnacles of classical analysis due to numerous applications.

It is used to calculate the limits of functions, study their extrema, inflection points, convexity and concavity intervals, convergence of series and integrals, estimate the rate of their convergence or divergence, etc.

Also, Taylor's formula is very widely used in physical research – to determine the behaviour of a function that describes the process under study for certain values of the arguments or to estimate the error obtained as a result of replacing the value of the function with some polynomial.

Taylor's formula is also used to find the kinematic characteristics of the motion of bodies, to study the nature of motion of bodies for a given law of motion, to determine the qualitative behaviour of the considered physical quantities under limiting conditions and forces acting on the body for a given law of motion, etc.

Key words: Taylor formula, remainder of the formula, physics problems, differentiable functions, body motion, particle energy.

Отримано: 6.09.2021

УДК 681.142.2 DOI: 10.32626/2307-4507.2021-27.167-171

Ю. Л. Сморжевський

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
e-mail: kaf_math@ukr.net

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ 10 КЛАСУ

Новий зміст фізико-математичної освіти в середніх загальноосвітніх навчальних закладах наблизив розглядувані навчальні дисципліни до рівня сучасного наукового знання. Глибокі зв'язки, які існують між фізикою і математикою як науками, мають знайти адекватне відображення у зв'язках між відповідними дисциплінами, як методологічним принципом STEM-освіти. Розглядаючи математику і фізику як навчальні предмети, потрібно враховувати, що кожна наукова теорія, ідея, поняття, відображаючи у взаємозв'язках одну із сторін матеріальної дійсності, надає той основний матеріал, який представляє зміст відповідних навчальних предметів.

Здійснення міжпредметних зв'язків передбачає такий взаємозв'язок всього навчально-виховного процесу, коли різні навчальні дисципліни з різних сторін вивчають окремі сторони явищ природи. При цьому зв'язок між явищами, що вивчаються, не порушує внутрішню логіку кожної з дисциплін.

Розглянуто значення міжпредметних зв'язків математики і фізики в навчально-виховному процесі і розроблено рівневі фізичні задачі, які доцільно використовувати при вивченні деяких тем у курсі алгебри і початків аналізу 10 класу.

Ключові слова: прикладна направленість шкільного курсу математики, міжпредметні зв'язки, рівні навчальних досягнень учнів, степенева функція та тригонометричні функції.

Новий зміст фізико-математичної освіти в середніх загальноосвітніх навчальних закладах наблизив розглядувані навчальні дисципліни до рівня сучасного наукового знання. Глибокі зв'язки, які існують між фізикою і математикою як науками, мають знайти адекватне відображення у зв'язках між відповідними дисциплінами, як методологічним принципом STEM-освіти. Розглядаючи математику і фізику як навчальні предмети, потрібно враховувати, що кожна наукова теорія, ідея, поняття, відображаючи у взаємозв'язках одну із сторін матеріальної дійсності, надає той основний матеріал, який представляє зміст відповідних навчальних предметів.

Свідомого засвоєння знань учнями можна досягти лише при здійсненні міжпредметних зв'язків, коли учні використовують набуті знання для виконання різного роду практичних задач, що дає можливість підготувати повноцінного громадянина нашої країни, здатного до цілісного пізнання законів природи.

Здійснення міжпредметних зв'язків передбачає такий взаємозв'язок всього навчально-виховного процесу, коли різні навчальні дисципліни з різних сторін вивчають окремі сторони явищ природи. При цьому зв'язок між явищами, що вивчаються, не порушує внутрішню логіку кожної з дисциплін. Встановлюючи ці природні органічні зв'язки, вчитель сприяє формуванню в учнів узагальнених знань про важливі явища об'єктивного світу, вироблення єдиного цілісного наукового світогляду.