ФОРМУВАННЯ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ТА СВІТОГЛЯДУ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ В УМОВАХ НУШ ТА РЕАЛІЗАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

УДК 378.016:51 DOI: 10.32626/2307-4507.2023-29.110-113

Катерина ГЕСЕЛЕВА[1], Тетяна ДУМАНСЬКА[2]

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

e-mail: [1]heseleva@kpnu.edu.ua, [2]dumanska@kpnu.edu.ua;

ORCID: [1]0009-0009-2619-5604, [2]0000-0003-4172-8623

ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. У статті акцентується увага на необхідності навчання розв'язуванню прикладних задач, обґрунтовується необхідність оволодіння вміннями математичного моделювання як універсального методу розв'язування прикладних і практичних задач, представлено досвід формування у здобувачів вищої освіти вмінь математичного моделювання прикладних задач методами диференціальних рівнянь, виявлені міжпредметні зв'язки, наведені приклади розв'язування задач геометричного та фізичного змістів з теми «Диференціальні рівняння». Розв'язування задач проведено в три етапи, а саме: побудова математичної моделі, дослідження моделі та інтерпретація отриманих результатів.

Ключові слова: математичне моделювання, формування умінь математичного моделювання, прикладні задачі, диференціальні рівняння, методика розв'язування прикладних задач.

Досліджуючи різні природні явища та розв'язуючи задачі прикладного характеру з фізики, хімії, біології, економіки, не завжди можна встановити прямий зв'язок між величинами, що описують той чи інший процес. Значно простіше встановити зв'язок між величинами та швидкостями їх зміни в залежності від інших змінних величин (часу, кількості тощо). Закони, що описують ці природні явища, мають невідомі функції під знаком похідної. Так і виникає необхідність складання та розв'язування диференціальних рівнянь.

Оскільки математичними моделями багатьох задач природознавства й техніки є різні типи диференціальних рівнянь, доцільно показати студентам широке коло використання диференціальних рівнянь. Розглянемо деякі напрямки застосування диференціальних рівнянь задля розуміння необхідності їх вивчення.

Характер та методи розв'язування таких задач можна описати так:

Відбувається деякий процес – фізичний, хімічний, біологічний, економічний тощо. При цьому інтерес становить певна функціональна характеристика процесу. Наприклад, зміна з часом температури, тиску, маси, положення в просторі. Якщо нам відомо достатньо інформації про процес, який відбувається, то можна спробувати побудувати його математичну модель. Часто така модель має вигляд диференціального рівняння, одним із розв'язків якого є шукана функціональна характеристика процесу. Диференціальне рівняння відображає процес у контексті еволюції всього явища, динаміку його зміни. Цей перший етап завершується складанням диференціального рівняння для шуканої функції. Цим самим задача прикладного змісту перетворюється у математичну задачу, яка полягає у розв'язуванні диференціального рівняння.

Далі на другому етапі розглянемо математичну задачу у «чистому вигляді»: розв'язати отримане диференціальне рівняння, тобто знайти всі його розв'язки або лише ті, що задовольняють певні додаткові умови, якщо такі є. Таке рівняння розв'язуємо, використовуючи загальну теорію диференціальних рівнянь. Досвід показує, що різні за змістом задачі зводяться до аналогічних або однотипних диференціальних рівнянь. Якщо задачу, що описує деякий природний процес, вдалося записати у вигляді диференціального рівняння, методи розв'язування якого вже відомі, то цю задачу можна вважати розв'язаною. Тому є необхідність розробити алгоритм розв'язування таких задач.

Можна виділити такі кроки розв'язування задач прикладного змісту, які потребують застосування диференціальних рівнянь:

– складання диференціального рівняння;
– розв'язування цього рівняння;
– дослідження знайденого розв'язку.

Моделювання у навчанні, зокрема під час розв'язування геометричних задач, є матеріалізованою формою продуктивної розумової діяльності здобувачів вищої освіти, а самі моделі – як продукти і як засоби її здійснення [1].

Під час розв'язування більшості геометричних задач зручно дотримуватися наступних кроків:

1. Зробити рисунок і ввести позначення. Наприклад, $y = f(x)$ – рівняння шуканої кривої.
2. Відділити умови, які задані в довільній точці шуканого геометричного місця, від умов, що задані лише в окремих фіксованих точках. Інакше кажучи, відділити початкові умови. Наявність початкових умов не враховувати при складанні диференціального рівняння.
3. Виразити всі величини, які є в умові задачі, через x, y, y', враховуючи при цьому геометричний зміст похідної.
4. Враховуючи умову задачі, скласти диференціальне рівняння шуканого сімейства кривих.
5. Знайти загальний розв'язок отриманого диференціального рівняння.
6. Використовуючи початкові умови, знайти конкретну інтегральну криву, яка відповідає шуканій.

Розглянемо такий алгоритм на конкретних прикладах.

Приклад 1. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $P(1;2)$, для якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю Ox ділиться навпіл в точці перетину з віссю Oy.

Розв'язання

Нехай точка $M(x;y)$ – довільна точка шуканої кривої з біжучими координатами, AM – дотична до кривої, де точка A – це точка перетину дотичної й осі Ox, точка B – точка перетину дотичної й осі Oy, точка C – проєкція точки M на вісь Ox (*рис. 1*).

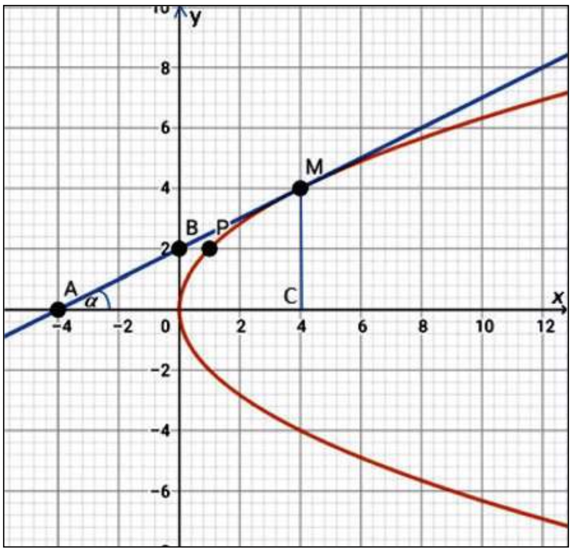

Рис. 1

Кут, що утворився в результаті перетину дотичної та додатного напряму осі Ox, позначимо через α. Врахувавши геометричний зміст похідної, можемо записати $y' = \operatorname{tg}\alpha$. Розглянувши (*рис. 1*), можна записати $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{CM}{AC}$, оскільки $\triangle ACM$ прямокутний.

Виразимо відношення через координати точки M. Оскільки $MC \parallel BO$, то $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AB}{BM}$. Оскільки $OC = x$ і $AB = BM$, то $AO = x$ і $AC = AO + OC = 2x$. Крім того, $CM = y$. Тому отримаємо, що:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{2x},\ y' = \frac{y}{2x},\ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Проінтегрувавши ліву та праву частини отриманого рівняння, матимемо такий вираз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x},\ \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \widetilde{C},$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|,\ C \in R \setminus \{0\},$$

або

$$2\ln|y| = \ln|Cx|,\ \ y^2 = |Cx|.$$

Таким чином, загальний інтеграл отриманого диференціального рівняння знайдено. Оскільки $C \in R$, то варто розглянути такі випадки:

1) $C = 0,\ y^2 = 0, \forall x \Rightarrow y = 0, x \in R$ – розв'язок диференціального рівняння визначає пряму $y = 0$ (вісь Ox);

2) $C \neq 0,\ y^2 = C|x|, x \in R$ – загальний інтеграл диференціального рівняння визначає дві сім'ї парабол (вітками вліво, якщо $C < 0$; вітками вправо, якщо $C > 0$), які проходять через початок координат, симетричних відносно осі Ox.

З умови задачі очевидно, що отримаємо другий випадок з вищезазначених, бо точка P знаходиться в першій чверті. З отриманої сім'ї інтегральних кривих потрібно знайти шукану параболу, що задовольняє початкові умови, тобто проходить через точку $P(1;2)$.

Для цього підставимо значення $x = 1, y = 2$ в загальний розв'язок $y^2 = Cx$ і знаходимо конкретне значення сталої: $C = 4$. Таким чином, рівняння шуканої кривої має вигляд $y^2 = 4x$.

Приклад 2. За якою поверхнею обертання слід відшліфувати дзеркало прожектора, щоб усі промені, що виходять з джерела світла, розміщеного в точці *O*, на осі обертання відображалися б дзеркалом паралельно до цієї осі (*рис. 2*)?

Розв'язання

Розглянемо меридіанний переріз поверхні обертання. Розмістимо початок координат в точці *O*, а додатній напрямок осі Ox – вважатимемо віссю обертання прожектора. Кут, який утворився в результаті перетину дотичної *AT* і осі *Ox* у довільній точці перерізу $D(x;y)$ позначимо α. Тоді, за умовою задачі $\angle SDT = \alpha$. Оскільки кут падіння променя світла дорівнює куту відбивання, то $\angle ODN = \angle SDN$ і $\angle ODA = \angle SDT = \alpha$.

$\triangle ODA$ рівнобедрений і $AO = OD$. Відрізок $AO = AP - OP = y\operatorname{ctg}\alpha - x$, але $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{y'}$, тому

$$AO = \frac{y}{y'} - x,\ OD = \sqrt{y^2 + x^2}.$$

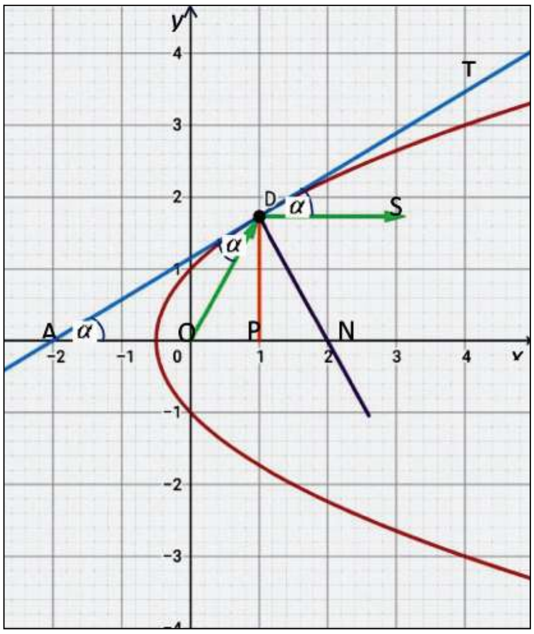

Рис. 2

Отримаємо наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{y^2 + x^2} \quad \text{або} \quad ydx - \left(x + \sqrt{y^2 + x^2} \right) dy = 0 .$$

Це однорідне рівняння першого порядку. Замінимо $x = yu$ і, відповідно, $dx = udy + ydu$. Отримаємо диференціальне рівняння:

$$y\left(udy + ydu\right) = \left(yu + \sqrt{y^2u^2 + y^2} \right) dy,$$

$$y(udy + ydu) = \left(yu + \sqrt{y^2\left(u^2 + 1\right)} \right) dy,$$

$$udy + ydu = \left(u + \sqrt{u^2 + 1} \right) dy,$$

$$ydu = \left(u + \sqrt{u^2 + 1} - u \right) dy, \quad ydu = \sqrt{u^2 + 1} dy,$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dy}{y}.$$

Проінтегрувавши обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$\ln\left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| = \ln|y| - \ln|C|, C \in R \setminus \{0\}, \quad \text{або}$$

$$\left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| = \frac{|y|}{|C|}.$$

Спростимо рівняння меридіанного перерізу, позбувшись ірраціональності:

$$\left(\frac{y}{C} - u \right)^2 = u^2 + 1, \quad \frac{y^2}{C^2} - \frac{2yu}{C} = 1.$$

Замінимо штучну змінну u на відношення $\frac{x}{y}$:

$$y^2 - 2Cy\frac{x}{y} = C^2, \quad y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2} \right).$$

Для $C = 0$ будемо мати $y^2 = 0, \forall x \Rightarrow y = 0, \forall x$.

Якщо $C > 0$, то отримаємо сім'ю парабол з віссю симетрії, що співпадає з віссю Ox, де параметр $p = C$, і вершиною, яка розташована на відстані $\frac{C}{2}$ вліво від початку координат.

Якщо $C < 0$, то отримаємо аналогічну сім'ю парабол, – яка розташована на відстані $\frac{C}{2}$ вправо від початку координат.

З вище зазначеного випливає, що шукана поверхня обертання – параболоїд обертання (*рис. 3*).

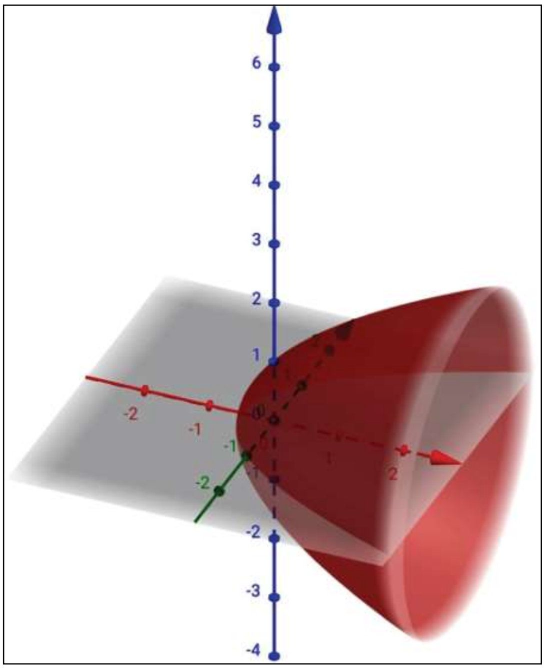

Рис. 3

Для розв'язування задач фізичного змісту, аналогічно як і для геометричних задач, можна рекомендувати дотримуватися такого алгоритму дій:

1. Перш за все необхідно встановити, який фізичний закон описує процес, що розглядається в умові задачі.
2. Вирішити, яку величину обрати за незалежну змінну, наприклад час t, а яку – за шукану функцію, наприклад $S = f(t)$.
3. Виходячи з умови задачі, визначити початкові умови. Наприклад, $S_0 = f(t_0)$.
4. Виразити всі, задані в умові задачі величини, через t, S, S', користуючись при цьому фізичним змістом похідної.
5. Виходячи з умови задачі, на основі фізичного закону, якому підпорядкований процес, описаний у задачі, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. Врахувати початкові умови та знайти частковий розв'язок відповідного диференціального рівняння.

Приклад 3. Посудина об'ємом 40 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). В ємність щосекунди прибуває 0,2 л азоту, який безперервно перемішується, та така ж кількість суміші витікає з посудини. Через який час в ємності буде 99% азоту?

Розв'язання

Уведемо наступні позначення: t – час (аргумент), $x(t)$ – кількість літрів азоту в ємності через час t с після початку досліду (експерименту).

Розглянемо проміжок часу Δt і знайдемо змінну кількості азоту в посудині за цей проміжок часу. Якщо за 1 секунду прибуває 0,2 л азоту, то за час Δt прибуде $0,2\Delta t$ л азоту. Обрахуємо, яка кількість азоту витече за цей час, враховуючи, що кількість азоту постійно змінюється.

У момент t в 40-ка літровій ємності знаходиться $x(t)$ азоту, це означає, що в 1 л суміші знаходиться $\frac{x(t)}{40}$ л азоту. І, якщо б протягом цього часу кількість азоту $x(t)$ в ємності не змінювалася, то в наявній кількості суміші ($0,2\Delta t$ л) за час Δt містилось би $\frac{x(t)}{40}\cdot 0,2\Delta t$ л азоту.

Зміна кількості азоту за час від t до $t+\Delta t$ і $x(t+\Delta t)-x(t)$ дорівнює різниці кількості, що прибув та вибув:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) \approx 0,2\Delta t - \frac{x(t)}{40}\cdot 0,2\Delta t.$$

З цього випливає, що

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \approx \frac{1}{5} - \frac{x}{200},$$

причому, ця рівність буде точніша при Δt прямуючому до нуля. Оскільки, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{5} - \frac{x}{200},\quad \frac{dx}{dt} = \frac{40-x}{200},\quad \frac{200}{40-x}dx = dt.$$

Проінтегрувавши обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$-200\ln(40-x) = t + \ln|C_1|,$$

$$\ln(40-x) = -\frac{t}{200} - C_2,$$

$$40 - x = e^{-\frac{t}{200}-C_2},\quad 40 - x = e^{-\frac{t}{200}}\cdot e^{-C_2},$$

$$40 - x = e^{-\frac{t}{200}}\cdot C,\ C > 0,$$

$$x(t) = 40 - Ce^{-\frac{t}{200}}. \qquad (1)$$

Використавши додаткові умови, будемо мати:

$$x(0) = 40\cdot 0,8 = 32.$$

Знаходимо значення довільної сталої *C*:

$$32 = 40 - Ce^{0},\ C = 8.$$

Підставивши $C = 8$ у рівність (1), знайдемо закон, за яким визначається кількість азоту в повітрі в будь-який момент часу:

$$x(t) = 40 - 8e^{-\frac{t}{200}}. \qquad (2)$$

Використавши рівність (2), знайдемо, через який час ємність буде складатися з 99% азоту, тобто 39,6 л.

$$39,6 = 40 - 8e^{-\frac{t}{200}},\ e^{-\frac{t}{200}} = 0,05,\ e^{\frac{t}{200}} = 20,$$

$$t = 200\ln 20 \approx 200\cdot 2,9957 \approx 600\ (\text{с}).$$

Відповідь: через 600 с в ємності буде 99% азоту.

Таким чином, диференціальними рівняннями можна описати різноманітні процеси, з якими ми зустрічаємося не тільки під час вивчення математики чи фізики, але й у повсякденному житті. Їхню роль в сучасному світі важко переоцінити, як і роль самої математики. Математичне моделювання і точні кількісні методи дослідження є запорукою науково-технологічного прогресу та кращого розуміння процесів. Тому важливим є належний рівень сформованості вміння будувати математичну модель прикладної задачі та здійснювати її детальний аналіз.

Список використаних джерел:

1. Корінчук Ю.Н., Корінчук В.В. Моделювання в математиці під час розв'язування прикладних та практичних задач. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*. Кропивницький: Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, 2019. Том 1. № 177. С. 191-195.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: навчальний посібник. Київ: Либідь, 2003. 504 с.

Kateryna HESELEVA, Tetiana DUMANSKA

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University

FORMATION OF THE SKILLS OF MATHEMATICAL MODELING OF APPLIED PROBLEMS USING THE METHODS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. The article focuses attention on the need to learn how to solve applied problems, substantiates the need to master the skills of mathematical modelling as a universal method of solving applied and practical problems, presents the experience of students of higher education in forming the skills of mathematical modelling of applied problems using the methods of differential equations, reveals interdisciplinary connections, examples of solving geometric and physical problems from the topic "Differential Equations" are given. Problem solving was carried out in three stages, namely: building a mathematical model, studying the model and interpreting the result.

Key words: mathematical modelling, formation of mathematical modelling skills, applied problems, differential equations, method of solving applied problems.

Отримано: 12.09.2023