УДК 517.5
DOI: 10.32626/2307-4507.2023-29.114-117

Ірина КОВАЛЬСЬКА[1], Олена РАДЗІЄВСЬКА[2]

[1]Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
[2]Національний університет харчових технологій

e-mail: [1]kovalska@kpnu.edu.ua, [2]radzlena58@gmail.com;
ORCID: [1]0000-0002-2653-0152, [2]0000-0002-4249-0808

УМОВИ ВИКОРИСТАННЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ФРАКТАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Анотація. Для опису властивостей самоподібності та інваріантності, що спостерігаються в різних фізичних ситуаціях, в сучасній науці активно використовується теорія фракталів та мультифракталів. Розглядається конформне відображення першого роду, яке задається цілою лінійною функцією $w = az + b$, де w, z – комплексні змінні, a, b – комплексні сталі, $a \neq 0$. З його допомогою виконуються афінні перетворення для побудови трикутника Серпінського та кривої Коха через задання функцій $w_з(z)$ і відшукання коефіцієнтів $\mathrm{Re}\,a_i, \mathrm{Im}\,a_i$, $\mathrm{Re}\,b_i$, $\mathrm{Im}\,b_i$, $i = 1,2,3$ або $i = 1,2,3,4$. Ці коефіцієнти кодують зображення об'єкта і за ними його можна однозначно відновити. Визначається, що метод, при якому виявляються самоподібні області в об'єкті і знаходяться для них коефіцієнти конформного відображення працює за умови, що кожне таке відображення є стискуючим. Лише тоді теорема Банаха про нерухому точку забезпечить збір зображень при декомпресії. Цей метод стиснення графічної інформації називають фрактальним.

Ключові слова: самоподібність, фрактальна розмірність, фрактальні множини, конформне відображення, афінні перетворення, стискуюче відображення, нерухома точка, ітерації, декомпресія.

Фрактальний метод в сучасній науці відноситься до одного із самих перспективних напрямів моделювання складних систем. Адже для опису властивостей самоподібності та інваріантності, що спостерігаються в різних фізичних ситуаціях, сьогодні активно використовується теорія фракталів та мультифракталів. В природі фрактальні структури спостерігаються на кожному кроці: дим, блискавка, контури хмар, крона та коренева система дерева, русла річок і берегова лінія, тріщини на поверхнях, бронхи легенів, артерії, пористі губки і багато інших структур, які не мають, на перший погляд закономірностей у своїй будові. Але відсутність порядку в них – це ілюзія, яка виникає при першому ознайомленні. Поняття фрактал може стосуватися геометричних об'єктів (ліній, поверхневих та просторових тіл) з сильно порізаною формою і з певною повторюваністю у загальному діапазоні масштабів. Якщо повторюваність повна, то тоді говорять про регулярні фрактали, якщо ж спостерігається певний елемент випадковості, то такі фрактали називають випадковими. Структура випадкових фракталів на малих масштабах не подібна цілому об'єкту, але їх статистичні характеристики співпадають. До спеціального класу «мультифракталів» відносяться такі фрактали. які визначаються не одним алгоритмом побудови, а кількома послідовними алгоритмами і важко знайти розділ науки, де б не розглядалися представники цього класу.

Фракталами (лат. *Fractus* – дроблений) називаються фігури, що мають властивість самоподібності, або масштабної інваріантності. Виникнення фрактальної геометрії пов'язано з роботами Бенуа Мандельброта, який розпочав дослідження самоподібності в 1960-х роках і в 1977 році опублікував книгу «Fractals: Form, chance, and dimension».

В основному фрактали ділять на геометричні, алгебраїчні та стохастичні. Іноді стохастичні фрактали називають мультифракталами.

Але можна розглядати й інший поділ фракталів на рукотворні та природні. До рукотворних відносяться ті фрактали, які були придумані людиною. Вони за будь-якого масштабу мають фрактальні властивості. При розгляді природних фракталів, зазвичай, накладають обмеження на область існування – тобто визначають максимальний і мінімальний розмір, за яких об'єкт зберігає фрактальні властивості.

Самі наочні – це геометричні фрактали. В них одразу видно самоподібність. Тому історія фракталів розпочалася з їх дослідження математиками ще у XIX столітті. Такі фрактали отримують, визначаючи деяку операцію, яку називають генератором. На кожному кроці алгоритму відрізки фігури замінюються на цей генератор у відповідному масштабі. Нескінченно багато разів повторюючи таку процедуру, отримаємо фрактальний об'єкт. Його форма може здаватися складною, але вона визначається лише формою генераторРозглянемо для прикладу побудову одного із найдавніших геометричних фракталів – Канторової досконалої множини (*рис. 1*).

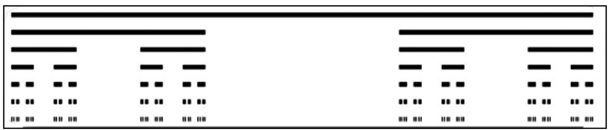

Рис. 1. *Канторова досконала множина*

Беремо відрізок $[0;1]$. Потім ділимо його на три рівні частини і вилучаємо центральний відрізок $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$. Це перший крок ітераційної процедури. На другому кроці такій же процедурі поділу на три рівні частини і наступного вилучення центральних частин, а саме – відрізків $\left[\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right]$ і $\left[\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right]$, піддається кожен з двох відрізків, що залишилися. Так продовжується до нескінченності. Легко бачити, що міра множини, яка залишається на відрізку $[0;1]$ після всіх цих вилучень, рівна нулю, оскільки сумарна довжина всіх вилучених відрізків рівна 1:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Щоб побудувати алгебраїчний фрактал, можна використовувати ітерації нелінійних відображень, що задаються простими алгебраїчними формулами. Розглянемо двовимірний випадок – комплексну площину. Нелінійні динамічні системи можуть мати кілька стійких станів – аттракторів. На комплексній площині аттрактором називають точку, до якої збігається процес ітерації $z_n = f(z_{n-1})$ при $n \to \infty$.

Якщо, наприклад, позначити $z_n = p_C(z_{n-1})$, де $p_C(z) = z^2 + C$, C – комплексне число, то отримаємо фрактал

$$M = \left\{ C \in \mathbb{C} : (p_C)_n(0) \nrightarrow \infty \text{ при } n \to \infty \right\},$$

який називається множиною Мандельброта (*рис. 2*).

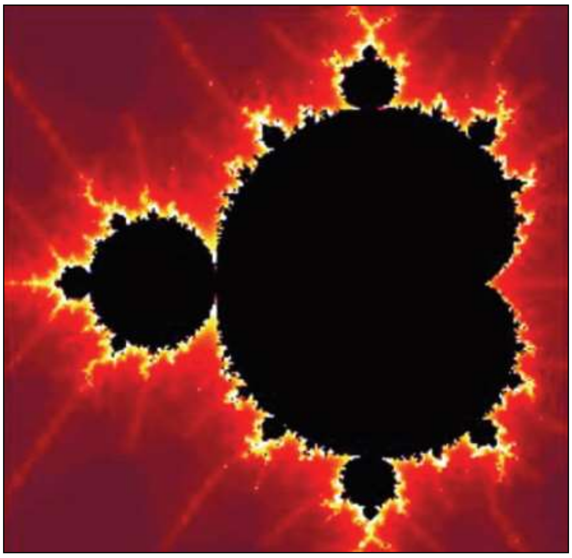

***Рис. 2.** Множина Мандельброта*

Далі розбиваємо комплексну площину на ділянки, в які може перейти аттрактор. Забарвлюючи ці ділянки різними кольорами, отримуємо фазовий колірний портрет цієї системи (ітераційного процесу). Якщо змінювати алгоритм вибору кольору, то будемо отримувати фрактальні картини з різними кольоровими візерунками (*рис. 2*).

Найцікавішими для фізиків є стохастичні фрактали, тобто такі самоподібні об'єкти, при побудові яких у ітеративної системи випадково змінюються деякі параметри. Вони знаходять своє відображення у багатьох фізичних процесах. При цьому співвідношення випадковості та закономірності може бути різним. Найбільш відомим стохастичним фракталом є плазма (*рис. 3*). Розглянемо для неї покроковий алгоритм побудови. Для заповнення плазмою квадрата $n \times n$ точок потрібно:

1. Задати довільним чином кольори кутів квадрата.
2. Визначити колір середини кожної сторони, як середнє між кольорами прилеглих до неї кутів плюс / мінус деяка випадкова величина.
3. Визначити колір центру квадрата як середнє між кольорами кутів плюс/мінус деяка випадкова величина.
4. Отримуємо 4 квадрати із заданими кольорами вершин– для кожного з них потрібно повторити алгоритм з другого кроку.

Відхилення випадкової величини залежить від розміру квадрата – чим більший квадрат, тим може бути більше відхилення.

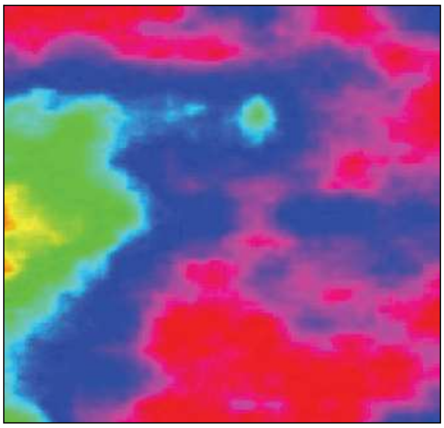

***Рис. 3.** Плазма*

Як бачимо, поняття фрактала і фрактальної геометрії дають нам можливість виявити раніше приховані закономірності в будові і зовнішньому вигляді природних об'єктів, систематизувати та досліджувати їх особливості. Легко помітити, що, фрактальний світ непогано відображає реальний, оскільки численні природні об'єкти мають властивості фрактальних множин. Тому, перефразовуючи відомий вислів Галілея, можна сказати, що книга природи написана мовою фракталів. Ця дивна подібність реального і фрактального світів зумовлена, перш за все, тим, що із зміною масштабів властивості фізичного світу змінюються досить повільно.

Розглянемо поняття фрактальної розмірності об'єкта. Зазвичай з розмірністю пов'язують кількість незалежних параметрів, які необхідно задати для визначення положення точки у просторі. Нам звичні уявлення про те, що лінія – одномірна $(d = 1)$, площина – двомірна $(d = 2)$, куб міститься у тривимірному просторі $(d = 3)$ і т. д. Але такий погляд на все різноманіття, яке приховує в собі термін розмірність досить поверхневий і спрощений. Найчастіше концепції розмірності формуються через виявлення параметрів множин, які утворюють покриття.

Розмістимо фрактальний об'єкт в звичайному евклідовому просторі розмірності d. Виконаємо покриття цього об'єкта d – вимірними кулями радіуса ε. Нехай для покриття було використано не менше, ніж $N(\varepsilon)$ куль. Якщо при досить малих ε величина $N(\varepsilon)$ обернено пропорційна ε^D:

$$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^D},$$

то число D називається хаусдорфовою або фрактальною розмірністю цього об'єкта. Після логарифмування даного виразу, отримуємо: $D \ln \varepsilon \sim -\ln N(\varepsilon)$, а отже

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

З цього означення можна отримати значення розмірності для відомих множин. Якщо множина M складається із N ізольованих точок, то для її покриття при досить малих ε вистачить $N(\varepsilon) = N$ куль і при зменшенні діаметрів цих куль, їх кількість не буде змінюватись. Тому фрактальна розмірність множини M рівна нулю: $D = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N}{\ln \varepsilon} = 0$ і співпадає з евклідовою розмірністю ізольованої точки $d = 0$.

Щоб повністю покрити відрізок прямої довжиною Δ, потрібно щонайменше $N(\varepsilon)=\frac{\Delta}{\varepsilon}$ одновимірних відрізків довжиною ε. Тому

$$D=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\frac{\Delta}{\varepsilon}}{\ln\varepsilon}=1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\Delta}{\ln\varepsilon}=1-0=1$$

і фрактальна розмірність відрізка прямої співпадає з його евклідовою розмірністю $d=1$.

Для деякої області площею S двовимірної поверхні при достатньо малих ε для повного покриття необхідно $N(\varepsilon)=\frac{S}{\varepsilon^2}$ квадратиків. Тому фрактальна розмірність гладкої поверхні $D=2$ співпадає з її евклідовою розмірністю $d=2.$ Аналогічно для деякого просторового тіла об'ємом V фрактальна розмірність $D=3$ співпадає з евклідовою $d=3$.

Для визначення фрактальної розмірності регулярних фракталів з властивостями ідеальної самоподібності, де на будь-якому кроці кожен елемент з лінійними розмірами l замінюють на p подібних елементів з розмірами $\frac{l}{q}$, $(q>1)$, можна використовувати формулу

$$D=\frac{\ln p}{\ln q}.$$

Наприклад, фрактальна розмірність трикутника Серпінського підраховується так:

$$D=\frac{\ln 3}{\ln 2}\approx 0,585\ ,$$

а для кривої Коха

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}\approx 1,26.$$

Спробуємо побудувати трикутник Серпінського на основі його самоподібності. Відомо, що окремі частини самоподібних фракталів мають такий же вигляд, як і сам фрактал.

Розглянемо конформне відображення першого роду, яке задається цілою лінійною функцією $w=az+b$, де w,z – комплексні змінні, a,b – комплексні сталі, $a\neq 0$. При такому відображенні зберігаються кути (за величиною і за напрямом) та має місце сталість розтягів (стисків). Його можна розглядати, як суму трьох перетворень подібності: повороту вектора $\vec{z}$ на кут $\varphi=\arg a$, «розтягу» («стиску») в $|a|$ разів і паралельного перенесення отриманої точки на $\vec{b}$.

Виконаємо 3 афінні перетворення трикутника (*рис. 4*), при яких він стискається в 2 рази і переноситься в три області: вгору, вліво і вправо від центра трикутника (*рис. 5*). Ці відображення задаємо функціями: $w_1(z)=\frac{z}{2}$; $w_2(z)=\frac{z}{2}+1$; $w_3(z)=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Потім ці ж перетворення виконаємо з кожним з отриманих на *рис. 5* трикутників (*рис. 6*) і т. д. Очевидно, що $w_i(T)\subset T$ для $i=1,2,3$. Отже, трикутник T – це «нерухома точка» сукупності з трьох конформних відображень.

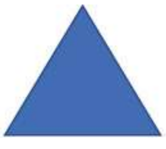

Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6

Якщо M – обмежена, замкнута множина комплексної площини і $\bigcup_{i=1}^{3}w_i(M)=W(M)$, то $W(T)=T.$ За відомою теоремою Банаха про те, що будь-яке стискуюче відображення в повному метричному просторі (M,ρ) має єдину нерухому точку, можна зробити висновок, що ітераційний процес, який складається з об'єднання композицій w_i, наближається до своєї нерухомої точки – трикутника Серпінського Т. Причому ми можемо отримати його незалежно від форми початкової фігури. Якщо замість трикутника на рис.4 використати круг і застосувати до нього ті ж самі функції $w_1(z)=\frac{z}{2}$; $w_2(z)=\frac{z}{2}+1$; $w_3(z)=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, то вже на четвертому кроці ітераційного процесу відмінності між початковими фігурами стають майже непомітні. Для стиснення графічної та відеоінформації використовують алгоритми JPEG та MPEG.

Для того, щоб зібрати трикутник Т, досить запам'ятати коефіцієнти відображень w_1,w_2,w_3, тобто дійсні числа $\mathrm{Re}\,a_i,\mathrm{Im}\,a_i$, $\mathrm{Re}\,b_i$, $\mathrm{Im}\,b_i$, $i=1,2,3.$ Отже ці 12 чисел кодують зображення трикутника T і за ними його зображення можна однозначно відновити. Ці дійсні числа зберігають в стиснутому вигляді графічну інформацію – «трикутник T». Цей метод стиснення графічної інформації називають фрактальним, бо у ньому використовується ідея подібності різних за розміром областей зображення. Метод, при якому відшукуються подібні області в об'єкті і визначаються для них коефіцієнти конформного відображення працює за умови, що кожне таке відображення є стискуючим. Лише за такої умови теорема Банаха про нерухому точку забезпечить збір зображень при декомпресії (в ході ітераційного процесу). Множину стискуючих відображень, які беруть участь в ітераціях, називають системою ітерованих функцій (Iterated Functions System – IFS).

Аналогічно до трикутника Серпінського T можна побудувати криву Коха K. Розглянемо конформне відображення першого роду, яке задається цілою лінійною функцією $w=az+b.$ Виконаємо 4 афінні перетворення першого відрізка (*рис. 7*), при яких він: стискається в 3 рази; стискається в 3 рази, повертається на 60° і переноситься на $\frac{1}{3}$ вправо; стискається в 3 рази, повертається на – 60° і переноситься на $\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}$; стискається в 3 рази, і переноситься на $\frac{2}{3}$ вправо. Ці відображення задаємо функціями: $w_1(z)=\frac{z}{3}$; $w_2(z)=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\cdot\frac{z}{3}+\frac{1}{3}$; $w_3(z)=\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}}\cdot\frac{z}{3}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}$; $w_4(z)=\frac{z}{3}+\frac{2}{3}.$ Отримуємо другу лінію (ламану) (*рис. 7*). Потім такі ж перетворення виконаємо з кожною ланкою цієї ламаної і т. д. Очевидно, що $w_i(K)\subset K$ для $i=1,2,3,4;$ $K=\bigcup_{i=1}^{4}w_i(K).$ Тобто, крива Коха K – це «нерухома точка» сукупності з чотирьох конформних відображень.

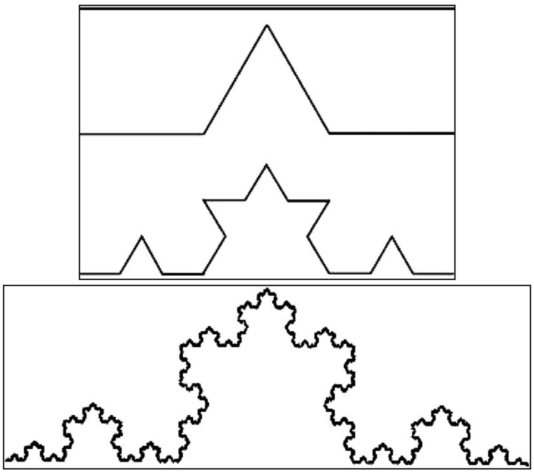

Рис. 7. *Крива Коха*

Отже, для того, щоб зберегти інформацію про криву Коха, досить запам'ятати коефіцієнти відображень w_1, w_2, w_3, w_4 тобто дійсні числа $\mathrm{Re}\,a_i, \mathrm{Im}\,a_i$, $\mathrm{Re}\,b_i$, $\mathrm{Im}\,b_i$, $i = 1,2,3,4$. Саме ці 16 чисел кодують зображення кривої K і за ними вона може бути однозначно відновлена.

Суттєво, що кожне таке відображення має бути стискуючим, тобто образ K повинен бути менший за K. Завдяки цьому відбувається «збір» зображень в процесі декомпресії (відновлення). І при кожній наступній ітерації можна бачити все дрібніші деталі зображення.

При стисненні інформації основне завдання полягає в тому, щоб перетворюючи деяке повідомлення, зменшити його довжину (кількість літер), але при цьому, щоб при відновленні повідомлення можна було б обійтись без використання будь-якої додаткової інформації.

Вперше алгоритм фрактального стиснення був розроблений Michael Barnsley та Alan Sloan (1991 р.). Вони дослідили застосування теорії систем ітерованих функцій (IFS) для процесу стиснення зображень. Подальші дослідження в цьому напрямку дали змогу подавати зображення реального світу, наприклад, цифрові зображення, як системи ітераційних рівнянь. При декомпресії алгоритму фрактального стиснення потрібно провести декілька ітерацій конформних відображень, коефіцієнти яких були отримані при стисненні.

Список використаних джерел:

1. Бак С.М. Лекції з комплексного аналізу. Вінниця: ФОП Горбачук І.П., 2011. 408 с.
2. Горобець Ю.І., Кучко А.М., Вавилова І.Б. Фрактальна геометрія у природознавстві: навчальний посібник. Київ: Наукова думка, 2008. 232 с.
3. Кіріченко Л.О., Радівілова Т.А. Фрактальний аналіз самоподібних і мультифрактальних часових рядів. Харків: ХНУРЕ, 2019. 106 с.
4. Ковальська І.Б. Використання конформних відображень для фрактального стиснення інформації. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 21. С. 659-661.
5. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ: ВШ, 1976. 456 с.
6. Mandelbrot B.B. Self-affine fractals and fractal dimension. *Phys. Phys. Scr*., 1985. N 32. P. 257-260 B.
7. Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature. New York (NY): W.H. Freeman and Co., 1983.
8. Синельник Е.Н., Ульянов В.В. Фракталы: от математики к физике. Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2005. 52 с.

Iryna KOVALSKA[1], Olena RADZIYEVSKA[2]

[1]Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University
[2]National University of Food Technology

TERMS OF USE OF CONFORMAL MAPPING TO STUDY FRACTAL INFORMATION COMPRESSION

Abstract. To describe the properties of self-similarity and invariance observed in various physical situations, the theory of fractals and multifractals is actively used in modern science. We consider a conformal mapping of the first kind, which is given by the entire linear function $w = az + b$, where w, z are complex variables, a, b are complex constants, $a \neq 0$. With its help, affine transformations are performed to construct the Sierpinski triangle and the Koch curve by specifying the functions $w_i(z)$ and finding the coefficients $\mathrm{Re}\,a_i, \mathrm{Im}\,a_i$, $\mathrm{Re}\,b_i$, $\mathrm{Im}\,b_i$, i = 1,2,3 or i = 1,2,3,4. These coefficients encode the image of the object and it can be unambiguously reconstructed by them. It is determined that the method in which self-similar regions in an object are detected and conformal mapping coefficients are found for them works under the condition that each such mapping is compressive. Only then will Banach's fixed point theorem ensure image collection during decompression. This method of compressing graphic information is called fractal.

Key words: self-similarity, fractal dimension, fractal sets, conformal mapping affine transformation, compressive mapping, fixed point, iterations, decompression.

Отримано: 22.10.2023