Список використаних джерел:

1. *Атаманчук П.С.* Інноваційні технології управління навчанням фізики. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ. — 1999. — 174 с.
2. *Гуржій А.М., Жук Ю.О., Волинський В.П.* Засоби навчання: Навч. посібник. — К.: ІЗМН. — 1997.
3. *Кух А.М., Кух О.М.* Сучасна дидактика і освітнє середовище // Збірник наукових праць К-ПДПУ. Серія педагогічна: Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-методичний центр. — 2003. — Вип. 9. — С.106-108.

Отримано: 14.04.2004.

УДК 681.142.2

Ю.Л.Сморжевський*, Л.О.Сморжевський**

**Інститут педагогіки АПН України*
***Кам'янець-Подільський державний університет*

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНЕ ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМУ ВВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНОГО КУТА В УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

В статті розкрито суть прийому введення допоміжного кута і наведено систему вправ для диференційованого формування в старшокласників такого спеціального прийому евристичної діяльності.

In the article the main point of the method of introduction of auxiliary angle is exposed and the system of exercises for differential formation of this method for senior pupils is demonstrated.

Актуальною проблемою в наші дні стала проблема творчості. Основною ідеєю реформування системи освіти в Україні є гуманізація і демократизація навчально-виховного процесу, сприяння розвитку інтересів і нахилів особистості, основа яких — розвиток особистості учня, його здібностей, можливостей та інтересів, залучення школярів до творчої, евристичної діяльності та розвиток її в процесі навчання математики.

Евристичну діяльність ми розглядаємо як спільну навчальну діяльність вчителя й учнів, учнів між собою для відкриття нового знання про математичні поняття та їх властивості, про прийоми постановки і розв'язування пов'язаних з ними задач.

З давніх часів вчених цікавили різні аспекти евристичної діяльності. Над ними працювали давньогрецькі математики Евклід, Папп Александрійський, Р.Декарт, Г.Лейбніц, А.Пуанкаре та ін.

Проблему розвитку евристичної діяльності учнів на уроках математики, формування прийомів (загальних і спеціальних) такої діяльності досліджували педагоги і методисти А.Артемов, Г. Балк, Г. Бевз, М.Бурда, К.Власенко, Ю.Кулюткін, Ю.Палант, В.Пушкін, Г.Саранцев, О.Скафа, З.Слєпкань, А.Хуторськой, та ін. [1, 2, 3].

Поряд з загальними прийомами евристичної діяльності учнів слід виділити також спеціальні прийоми, які характерні лише при вивченні шкільного курсу математики. До таких прийомів ми відносимо:

1. Введення допоміжних величин:

   а) допоміжного відрізка;
   б) допоміжного кута.

2. Введення допоміжних побудов.
3. Використання допоміжних задач.
4. Переформулювання задач.

Подальшого дослідження вимагає проблема диференційованого формування в учнів спеціальних прийомів евристичної діяльності на уроках стереометрії. У цьому контексті нами досліджується ефективність застосування прийому введення допоміжного кута.

У багатьох задачах стереометрії вдається побудувати такі трикутники, в які входять задані лінійні і кутові елементи; тим самим є можливість знайти в побудованому трикутнику потрібні елементи і виразити їх явно через задані елементи.

Однак, є немало і таких задач, в яких дані лінійні елементи не входять ні в один з трикутників, що містять у собі дані кути; бувають також задачі, в яких даються тільки кути.

Введення допоміжного кута застосовується у тих випадках, коли даний лінійний елемент не входить ні в один з тих трикутників, що мають в собі дані кути. Крім того, цей прийом може застосовуватись і в інших випадках.

Слід учням пояснити, що введення допоміжного кута полягає в тому, що, користуючись даними кутами, визначають один з тих кутів, який лежить з даною лінійною величиною в одному трикутнику, що дає можливість розв'язати задачу.

Спочатку доцільно вчити учнів вводити допоміжний кут у задачі, зв'язані з правильними призмами та пірамідами, а пізніше перейти до задач з іншими многогранниками.

Варто привчати учнів відшукувати такий лінійний елемент даного многогранника, який входить одночасно і в трикутник, що має шуканий кут, і в трикутник, що має даний кут (цей елемент не повинен бути в основі многогранника), і визначити його через вказані кути і елементи основи даного многогранника.

Розглянемо ці міркування на конкретних прикладах.

1. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Висота піраміди *H*. Знайти площу основи піраміди.

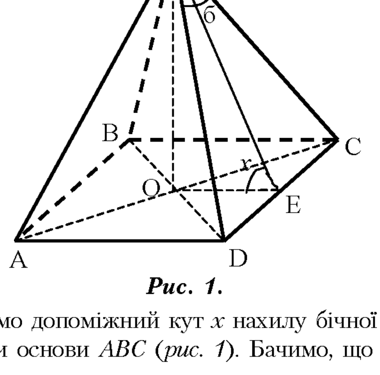

Рис. 1.

Введемо допоміжний кут x нахилу бічної грані SDC до площини основи ABC (*рис. 1*). Бачимо, що ΔOSE містить введений кут x, а ΔESC — відомий кут $\frac{\alpha}{2}$, і вони мають спільну сторону SE. Визначимо SE з кожного з цих трикутників. З ΔOSE $(\angle O = 90°)$: $SE = \dfrac{OE}{\cos x}$.

З ΔESC $(\angle E = 90°)$: $SE = EC \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, отже, $\dfrac{OE}{\cos x} = EC \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Але $OE = EC = \dfrac{CD}{2}$, тому $\dfrac{1}{\cos x} = \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, звідки $\cos x = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. З ΔOSE $(\angle O = 90°)$: $OE = OS \cdot \mathrm{ctg}\, x = H \cdot \mathrm{ctg}\, x$.

$$S_{осн} = DC^2 = (2OE)^2 = 4H^2\,\mathrm{ctg}^2\, x =$$

$$= 4H^2 \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 4H^2 \frac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 4H^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 4H^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.\quad S_{осн} = 4H^2 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Введення допоміжного кута корисно використовувати і при розв'язуванні задач на доведення [4].

2. Довести, що кути α і β, які утворює бічна грань правильної чотирикутної піраміди відповідно з площиною основи і з суміжною бічною гранню, зв'язані співвідношенням: $\cos\alpha = \sqrt{-\cos\beta}$.

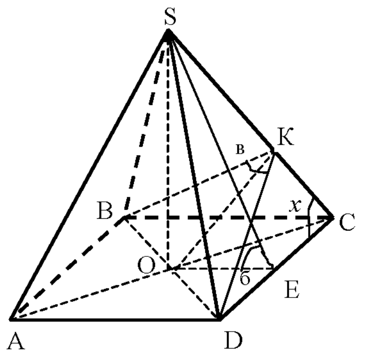

Рис. 2

Введемо допоміжний кут x нахилу бічного ребра до сторони основи піраміди, тобто $\angle SCE = x$ (*рис. 2*). Позначимо сторону основи через a. Тоді з $\Delta OSE (\angle O = 90°): SE = \dfrac{OE}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. З $\Delta SEC(\angle E = 90°)$: $SE = EC \cdot \mathrm{tg}\, x = \dfrac{a}{2}\mathrm{tg}\, x$. Отже, $\dfrac{a}{2\cos\alpha} = \dfrac{a}{2}\mathrm{tg}\, x$; $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\, x$.
З ΔDKC $(\angle K = 90°)$: $DK = DC \cdot \sin x = a \sin x$.

З ΔDKO $(\angle O = 90°)$: $DK = \dfrac{OD}{\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. Отже,

$$a\sin x = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}};\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$\cos\alpha = \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}} = \sqrt{2\sin^2\frac{\beta}{2}-1} = \sqrt{-\cos\beta},$$

що й треба було довести.

Ми пропонуємо систему вправ трьох рівнів (середнього, достатнього і високого), які дадуть можливість диференційовано формувати в учнів даний прийом евристичної діяльності.

Середній рівень

1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайти відношення висоти піраміди до сторони основи.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічної грані до площини основи).

2. Кут між бічними гранями правильної трикутної піраміди рівний α. Знайти відношення апофеми бічної грані піраміди до її бічного ребра.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічного ребра піраміди до сторони основи).

3. Двогранний кут між суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди рівний β. Знайти відношення висоти піраміди до її бічного ребра.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічного ребра піраміди до площини основи).

4. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Знайти відношення сторони основи до апофеми піраміди.

(Допоміжний кут: кут нахилу апофеми бічної грані до площини основи).

5. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до сторони основи під кутом α. Знайти апофему, якщо висота піраміди дорівнює h.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічної грані піраміди до площини основи).

Достатній рівень

1. В правильній трикутній піраміді сторона основи рівна *8* см, а плоский кут при вершині рівний φ. Знайти висоту піраміди.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічної грані піраміди до площини основи).

2. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Висота піраміди дорівнює h. Знайти бічну поверхню піраміди.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічної грані піраміди до площини основи).

3. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, сторона якого дорівнює a. Одне з бічних ребер дорівнює b і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут *60°*. Знайти об'єм паралелепіпеда.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічного ребра призми до площини основи).

4. Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої l, а двогранний кут між суміжними бічними гранями β.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічного ребра піраміди до площини основи).

Високий рівень

1. У правильній трикутній піраміді з висотою h через сторону основи a проведено площину, яка перетинає протилежне ребро під прямим кутом. Знайти площу перерізу.

(Допоміжний кут: кут між площиною перерізу і площиною основи піраміди).

2. Грані паралелепіпеда — рівні ромби із стороною a і гострим кутом α. Знайти об'єм паралелепіпеда.

(Допоміжний кут: кут нахилу бічного ребра паралелепіпеда до площини основи).

3. В основі похилої призми лежить прямокутник із сторонами a і b. Дві суміжні бічні грані утворюють з основою гострі кути α і β. Бічне ребро дорівнює c. Знайти об'єм призми.

(Допоміжний кут: кут між висотою бічної грані призми і бічним ребром).

Результати експериментальної перевірки розробленої диференційованої системи задач показали, що використання даної системи завдань дає можливість диференційовано формувати в учнів прийом введення допоміжного кута.

Список використаних джерел:

1. *Кулюткин Ю.Н.* Эвристические методы в структуре решений. — М.: Педагогика, 1970. — 231 с.
2. *Балк Г.Д.* О применении эвристических приемов в школьном преподавании математики // Математика в школе. — 1969. — № 5. — С.21-28.
3. *Хуторской А.В.* Эвристическое обучение: Теория, методология, практика. — М.: Международная педагогическая академия, 1998. — 220 с.
4. *Сморжевський Л.О., Сморжевський Ю.Л.* Стереометрія. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання. — Кам'янець-Подільський: "Абетка-НОВА", 2002. — 68 с.

Отримано: 17.03.2004.

УДК 681.142.2

Ю.Л.Сморжевський

Інститут педагогіки АПН України

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНЕ ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМУ ВВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНОГО ВІДРІЗКА В СТАРШОКЛАСНИКІВ НА УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

В статті розкрито суть прийому введення допоміжного відрізка і наведено систему вправ для диференційованого формування в старшокласників такого спеціального прийому евристичної діяльності.

In the article the main point of the method of introduction of auxiliary segment is exposed and the system of exercises for differential formation of this method for senior pupils is demonstrated.

В сучасній дидактиці велика увага приділяється евристичному навчанню, яке передбачає оволодіння учнями навчальними уміннями й навичками при вивченні основ наук, зокрема, математики, розвиток їх евристичної діяльності. Ця діяльність включає в себе: а) самі творчі процеси по створенню математичних понять, їх властивостей і відношень; б) пізнавальні процеси, необхідні для супроводження творчості; в) організаційні, методологічні, психологічні та інші процеси, які забезпечують творчу і пізнавальну діяльність учнів. Для розвитку такої діяльності потрібно цілеспрямовано формувати в школярів загальні і спеціальні прийоми евристичної діяльності на уроках математики [1].

Проблемі формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках математики приділяли увагу такі математики і методисти, як А.Г.Артемов, Г.Д.Балк, М.І.Бурда, Т.С.Гришина, К.В.Власенко, Ю.Н.Кулюткін, О.І.Скафа, А.В.Хуторський та інші. Однак ця проблема висвітлена ще недостатньо. Мета цієї статті — розкрити методику диференційованого формування такого спеціального прийому евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії як введення допоміжного відрізка.

У багатьох задачах стереометрії вдається побудувати такі трикутники, в які входять задані лінійні і кутові елементи; тим самим є можливість знайти в побудованому трикутнику потрібні елементи і виразити їх явно через задані елементи.

Однак, є немало і таких задач, в яких дані лінійні елементи не входять ні в один з трикутників, що містять у собі дані кути; крім того, бувають задачі, в яких даються тільки кути.

В таких задачах для знаходження шуканих невідомих вводять допоміжні відрізки. За допомогою цих допоміжних відрізків шукані величини задаються як неявні функції від відомих або раніше знайдених величин.

Допоміжний відрізок вводять при розв'язуванні таких задач, в яких не дано лінійних елементів і треба знайти певну залежність між кутами. У цих задачах величину введених допоміжних відрізків звичайно знайти не можна, але для розв'язування задачі це не завжди потрібно.

Розглянемо приклади розв'язування таких задач.

1. Мимобіжні діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда нахилені до площини основи під кутами α і β. Знайти кут γ між цими діагоналями.

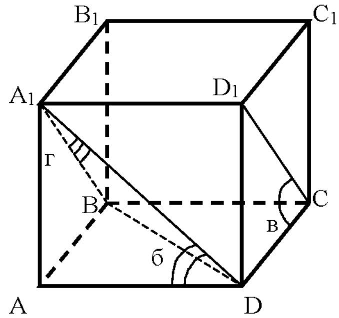

Рис. 1

Кутом між мимобіжними прямими A_1D і D_1C є кут BA_1D між прямою A_1D і прямою A_1B, паралельною прямій D_1C (*рис. 1*). Оскільки висота паралелепіпеда входить у два трикутники A_1DA і D_1CD, що мають дані кути α і β, то приймають її за допоміжний відрізок.

Позначимо $A_1A = D_1D = a$. Оскільки кут γ входить в ΔA_1DB, то його можна спробувати визначити, скориставшись теоремою косинусів. Для цього слід спочатку визначити сторону цього трикутника через висоту a і дані кути.

З ΔDD_1C ($\angle D = 90°$): $D_1C = \frac{DD_1}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta}$, $DC = DD_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\beta = a\,\mathrm{ctg}\,\beta$. З ΔAA_1D ($\angle A = 90°$): $A_1D = \frac{AA_1}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AD = AA_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Оскільки $A_1B = D_1C$, то $A_1B = \frac{a}{\sin\beta}$; $AB = DC$, то $AB = a\,\mathrm{ctg}\,\beta$; З ΔABD ($\angle A = 90°$): $BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2\,\mathrm{ctg}^2\beta + a^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha$.

За теоремою косинусів з ΔA_1BD: $BD^2 = A_1B^2 + A_1D^2 - 2A_1B \cdot A_1D \cdot \cos\gamma$, тому $a^2\,\mathrm{ctg}^2\beta + a^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha = +A_1D^2 - 2A_1B \cdot A_1D \cdot \cos\gamma$;

$$\frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\alpha} - \mathrm{ctg}^2\beta - \mathrm{ctg}^2\alpha;$$

$$\frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}; \quad \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = 2;$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

