

І.О.Теплицький, С.О.Семеріков

Криворізький державний педагогічний університет

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТІЛ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ**

Стаття присвячена досвіду впровадження технології комп'ютерного моделювання у факультативному курсі «Основи комп'ютерного моделювання з фізики» для учнів 9-11 класів технічного та фізико-математичного профілю.

The article is devoted to methodic teaching of computer modeling in course «Elements of computer modeling in physics» for pupils of 9-11 forms with profound studying of technical, physical and mathematical disciplines.

*Розум людини заслужено викликає наше захоплення, та непогано було б постати деякий час у благоговінні і перед природою, яка повністю беззаперечно підкорюється такому витонченому і такому простому закону — закону тяжіння.*

Ричард Фейнман

**Постановка проблеми.** У [5; 6] йшлося про доцільність організації факультативного курсу вивчення основ комп'ютерного моделювання з учнями старших класів технічного та фізико-математичного профілю. Ознайомлення учнів з технологією комп'ютерного моделювання при вивченні фізики вже стало актуальною задачею шкільної, а відповідно, і вищої педагогічної освіти.

При вивченні рухів тіл під дією сили всесвітнього тяжіння одним з важливих є питання про вигляд їхніх траєкторій. Пропонуючи школярам дослідження цього питання, ми нагадуємо, що в тих випадках, коли експериментування з реальними об'єктами виявляється принципово неможливим, експерименти проводять з математичними моделями цих об'єктів. Якщо в такій діяльності застосовують комп'ютер, то говорять про комп'ютерне моделювання. Головною метою ми ставимо тут створення умов для самостійного експериментування, яке дозволить учням переконатись в тому, що при русі тіла під дією сили всесвітнього тяжіння траєкторією є одна з кривих другого порядку — коло, еліпс, парабола або гіпербола в залежності від початкових умов.

**Основна частина.** У пропонованому матеріалі йдеться про одне із самих далекосяжних узагальнень, зроблених будь-коли людським розумом, а саме про закон всесвітнього тяжіння:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Якщо до цього додати, що всяке тіло під дією прикладеної до нього сили набуває в напрямі цієї сили прискорення, величина якого пропорційна силі і обернено пропорційна масі тіла,

$$a = \frac{F}{m}, \quad (2)$$

то, як зауважує Р.Фейнман, досвідченому математику цих відомостей цілком достатньо для виводу всіх подальших наслідків [7, с.122].

Наслідуючи шкільний підручник, спочатку ми розглянемо просту задачу, коли маси тіла-супутника і центрального тіла є несумірними (рух штучного супутника навколо планети [2, с.81] або рух планети навколо Сонця). Після цього дослідимо більш складний приклад — рух системи тіл із сумірними масами (планета — природний супутник, компоненти системи «подвійна зірка»), що обумовить перехід до системи відліку, пов'язаної зі спільним центром мас. Зазначимо, що саме обчислювальний експеримент, який проводиться в процесі дослідження, дозволяє не лише побачити траєкторії руху тіла, а й довести їх відповідність законам Кеплера. Традиційні методики позбавлені такої можливості.

Кожного разу після розв'язання більш загальної задачі будемо пропонувати учням переконатись, що нова модель дає попередні результати при переході до попере-

дніх умов. Це, на нашу думку, сприятиме в подальшому розумінню учнями принципу відповідності у фізиці.

**1. Рух штучного супутника планети**

Покажемо, що засобами чисельного аналізу можна розрахувати рух штучного супутника навколо планети, тобто, за певних умов можна одержати все різноманіття можливих орбіт.

**Притучення 1.** Будемо вважати (і не без підстав) масу штучного супутника набагато меншою за масу планети:  $m_{\text{супут}} \ll m_{\text{пл}}$ . Це дозволить не розглядати рух самої планети: адже прискорення, що їх надають одне одному два тіла при взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам.

**Притучення 2.** Враховуючи, що відстань між центрами планети й штучного супутника значно перевищує розміри супутника, і розглядаючи планету як однорідну кулю, вважатимемо у відповідності з [2, с.80], що забезпечено умови застосовності закону всесвітнього тяжіння.

**Притучення 3.** Будемо нехтувати опором середовища, адже реально штучні супутники рухаються у надзвичайно розріджених шарах атмосфери.

**Притучення 4.** Будемо також нехтувати впливом інших тіл Сонячної системи на дані два тіла. У такому разі на супутник діятиме єдина сила — сила всесвітнього тяжіння [2, с.81].

Рух штучного супутника відбувається у площині, в якій лежать вектор  $\mathbf{v}$  швидкості супутника і центр планети. В цій самій площині лежить і вектор  $\mathbf{F}$  сили тяжіння. Для опису такого руху візьмемо прямокутну систему координат з початком у центрі планети (рис. 1). Тут  $\mathbf{F}_x$  і  $\mathbf{F}_y$  — складові вектора сили тяжіння  $\mathbf{F}$ ,  $M$ ,  $m$  — відповідно маси центрального тіла (планети) і супутника;  $\mathbf{v}$  — вектор орбітальної швидкості супутника.

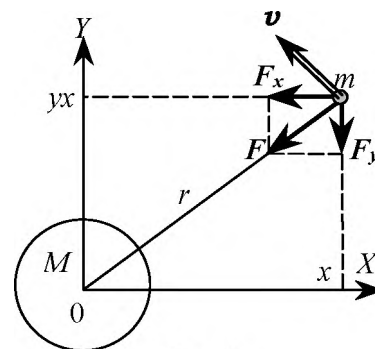


Рис. 1.

Положення супутника визначається двома координатами  $x$ ,  $y$ ; при цьому знаки проекцій  $F_x$  і  $F_y$  протилежні координатам.

З подібності трикутників маємо:  $\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}$ ,

$\frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r}$ , що разом з (1) дає

$$F_x = -GMm \cdot \frac{x}{r^3}; \quad F_y = -GMm \cdot \frac{y}{r^3}.$$

Для визначення проєкцій прискорення скористаємось (2):

$$a_x = -GM \cdot x/r^3; \quad a_y = -GM \cdot y/r^3. \quad (3)$$

Відстань  $r$  між тілами визначатимемо за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Система рівнянь (3), (4) є математичною моделлю руху штучного супутника навколо планети.

**Задача.** Нехай штучний супутник Землі рухається на висоті  $h = 300$  км. Дослідити форми можливих орбіт супутника в залежності від початкових умов його руху.

Відстань між Землею і супутником  $r = R_3 + h = 0,3 \cdot 10^7$  м +  $6,4 \cdot 10^7$  м =  $6,7 \cdot 10^7$  м.

Учням відомо [2, с.81], що тіло стане супутником планети, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості  $v_{1к}$ :

$$v_y(0) = v_{1к} = \sqrt{GM / r}. \quad (5)$$

Нехай цей момент відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис.

**Обговорення алгоритму. Обчислювальний експеримент**

1. У відповідності з [2, с.57-58, с.91-97] обчислення координат  $x$ ,  $y$  точок орбіти будемо виконувати за відомою схемою *прискорення* → *швидкість* → *координата*. Середовищем для моделювання обираємо відомі учням електронні таблиці.

2. Для зберігання початкових значень змінних  $v_x(0)$ ,  $v_y(0)$ ,  $x(0)$  та  $y(0)$  виділяємо в таблиці окремі комірки, розташовані під умовою, причому значення  $v_x(0)$  обчислюватиметься автоматично за формулою (5), яку необхідно буде створити у відповідній комірці.

3. Будемо фіксувати значення кінематичних характеристик руху супутника через інтервали часу  $\Delta t = 1$  хв. = 60 с, а час моделювання оберемо рівним ~100 хв.

Фрагмент відповідної таблиці поданий на *рис. 2*. На цьому ж рисунку показана колова траєкторія супутника – графік залежності  $y = y(x)$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$v_x$	$v_y$	$x$	$y$	Дано:	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	7714	6,70E+06	0,00E+00	$G = 6,672E-11$	
3	-8,86	-0,61					$\Delta t = 60$	
4	-8,80	-1,22					$M = 5,976E+24$	
5	-8,69	-1,83					$r = 6,700E+06$	
6	-8,54	-2,42						$v_x(0) = 0$
7	-8,36	-3,01						$v_y(0) = 7,71E+03$
8	-8,13	-3,58						$x(0) = 6,700E+06$
9	-7,86	-4,13						$y(0) = 0$
10	-7,56	-4,66						
11	-7,21	-5,17						
12	-6,84	-5,66						
13	-6,43	-6,12						

Рис. 2.

Ключові комірки цієї таблиці мають такий зміст:

комірка	формули / числа	примітки
H7	=0	
H8	=(H2*H4/H6)^0,5	
H9	=H6	
H10	=0	
A2	=-H\$2*\$H\$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в A3 і A4
B2	=-H\$2*\$H\$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в B3 і B4
C2	=H\$7	
D2	=H\$8	
E2	=H\$9	
F2	=H\$10	
C3	=C2+A2*\$H\$3*0,5	

комірка	формули / числа	примітки
D3	=D2+B2*\$H\$3*0,5	
E3	=E2+C3*\$H\$3	копіювати в E4
F3	=F2+D3*\$H\$3	копіювати в F4
C4	=C3+A3*\$H\$3	
D4	=D3+B3*\$H\$3	

**Порядок роботи.**

1. Спочатку заповнюються комірки H2-H6.
2. Далі слід заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.
3. Після цього всі формули 4-го рядка (від A4 по F4) копіюються у наступні до 100-го включно.
4. Маючи заповнену таблицю, будуємо графік за даними стовпців E та F.

Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника  $v_y(0)$  задовольнятиме нерівності  $v_{1к} < v_y(0) < \sqrt{2} v_{1к}$ , то, як відомо з курсу фізики, він рухатиметься по еліптичній орбіті. Тут  $\sqrt{2} v_{1к} = v_{1к}$  – друга космічна швидкість.

Продовжимо обчислювальний експеримент і збільшимо попереднє значення  $v_y(0)$  в 1,2 рази. Для цього відредагуємо формулу, введену раніше в комірку H8. А саме: =(H2\*H4/H6)^0,5\*1,2. Результат показаний на *рис. 3*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$v_x$	$v_y$	$x$	$y$	Дано:	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	9257	6,70E+06	0,00E+00	$G = 6,672E-11$	
3	-8,83					5,55E+05	$\Delta t = 60$	
4	-8,69					1,11E+06	$M = 5,976E+24$	
5	-8,45					1,66E+06	$r = 6,700E+06$	
6	-8,14					2,20E+06		$v_x(0) = 0$
7	-7,75					2,73E+06		$v_y(0) = 9,26E+03$
8	-7,31					3,24E+06		$x(0) = 6,700E+06$
9	-6,82					3,75E+06		$y(0) = 0$
10	-6,31					4,24E+06		
11	-5,79					4,71E+06		
12	-5,26					5,16E+06		
13	-4,73					5,60E+06		

Рис. 3.

Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення  $v_y(0) = \sqrt{2} v_{1к}$  тобто вводячи до H8 нового множника =(H2\*H4/H6)^0,5\*2^0,5, одержуємо параболічну траєкторію (*рис. 4*):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	ШСЗ
2	-8,88	0,00	0	10800	6,70E+06	0,00E+00	$G = 6,672E-11$	
3	-8,80					6,48E+05	$\Delta t = 60$	
4	-8,56					1,29E+06	$m_1 = 5,976E+24$	
5	-8,18					1,93E+06	$m_2 = 1,000E+03$	
6	-7,69					2,56E+06	$r = 6,700E+06$	
7	-7,12					3,18E+06	$v_{2x}(0) = 0$	
8	-6,50					3,79E+06	$v_{2y}(0) = 1,08E+04$	
9	-5,87					4,38E+06	$x_2(0) = 6,700E+06$	
10	-5,23					4,96E+06	$y_2(0) = 0$	
11	-4,62					5,52E+06		
12	-4,05					6,06E+06		
13	-3,52					6,59E+06		

Рис. 4.

**Завдання 1.** За якої умови траєкторія супутника стає гіперболічною? Перевірте відповідь на моделі.

**Завдання 2.** Змодельуйте рух Землі навколо Сонця, змінивши потрібним чином вміст відповідних комірок стовпця H.

**Завдання 3.** Змодельуйте рух комети Галлея.

**Завдання 4.** За якою ознакою всі розглянуті моделі можна об'єднати в одну групу?

Виконання перших двох завдань має репродуктивний характер.

Третє завдання передбачає еліптичну орбіту; воно потребує творчого підходу і прийняття певних самостійних рішень (зокрема, стосовно початкових значень параметрів кометної орбіти, збільшення часу моделювання тощо). Воно також може спричинити необхідність проведення додаткових обчислювальних експериментів.

Останнє завдання спрямоване на актуалізацію таких мислительних операцій, як аналіз, синтез, конкретизація й узагальнення, завдяки яким учні мають сформулювати коротку відповідь:  $m_{\text{супутник}} \ll m_{\text{пл.}}$ . Усвідомлення цього факту є логічною передумовою переходу до наступного етапу роботи.

### 2. Рух природного супутника планети та компонентів системи «подвійна зірка»

Природні супутники планет мають маси, якими не завжди можна нехтувати в порівнянні з масами самих планет, а отже не можна нехтувати рухом жодного з тіл. Поняття «центрально тіло» і «тіло-супутник» за цих умов втрачають свій початковий зміст. Моделювання руху компонентів таких систем є більш складною задачею, розв'язання якої потребує переходу до системи відліку, пов'язаної із спільним центром мас. Багато плідних ідей стосовно розв'язування подібних задач можна знайти в [8] на с. 20 та на с.137-140.

Знов почнемо аналіз із найпростішого випадку.

**Припущення 5.** Нехай тіла масами  $m_1$  і  $m_2$  рухаються по колових орбітах з радіусами  $r_1$  і  $r_2$  і відстань  $R$  між ними під час руху не змінюється (рис. 5).

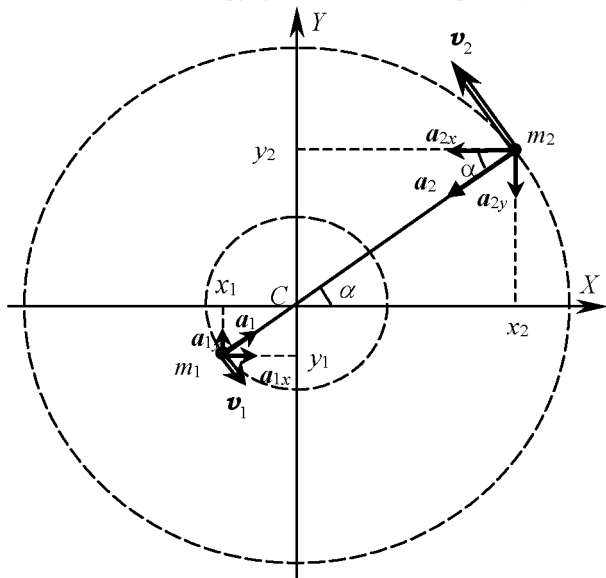


Рис. 5

1. Обидва ці тіла ( $m_1$  і  $m_2$ ) обертаються навколо нерухомої точки  $C$  – їхнього спільного центра мас. При цьому вони весь час знаходяться на одній прямій, що сполучає тіла і проходить через точку  $C$ , яка ділить відстань  $R$  між тілами на відрізки  $r_1$  і  $r_2$  у відношенні  $r_1/r_2 = m_2/m_1$ , звідки

$$r_1 = \frac{R}{1 + m_1/m_2}; \quad r_2 = \frac{R}{1 + m_2/m_1}.$$

Переходячи до проекцій, маємо для моменту часу  $t = 0$ :

$$x_1(0) = -\frac{R}{1 + m_1/m_2}; \quad x_2(0) = \frac{R}{1 + m_2/m_1}, \quad (6)$$

де  $x_1, x_2$  – координати тіл у системі відліку, пов'язаній із центром мас.

2. Певних уточнень вимагають також вирази для прискорень. Сила тяжіння надає прискорень обом тілам:  $Gm_1m_2/R^2 = m_1a_1 = m_2a_2$ , звідки

$$a_1 = Gm_2/R^2; \quad a_2 = Gm_1/R^2.$$

Для моменту часу  $t = 0$  одержуємо:

$$a_{1x}(0) = Gm_2x_1(0)/R^3; \quad a_{1y}(0) = Gm_2y_1(0)/R^3;$$

$$a_{2x}(0) = -Gm_1x_2(0)/R^3; \quad a_{2y}(0) = -Gm_1y_2(0)/R^3.$$

У загальному випадку (для будь-якого моменту часу) з урахуванням можливості зміни відстані між тілами (наприклад, при русі тіл по еліптичних траєкторіях) останні вирази набувають вигляду:

$$a_{1x} = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{1y} = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{2x} = -\frac{Gm_1(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

$$a_{2y} = -\frac{Gm_1(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3};$$

де  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  – відповідно координати першого й другого тіл, а  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  – відстань між ними у довільний момент часу  $t$ .

В задачі про штучний супутник ми вже бачили, що вигляд траєкторій руху тіл визначається початковими умовами, і зокрема, початковими швидкостями  $v_{1y}(0)$  і  $v_{2y}(0)$ . Оскільки розглядається рух тіл по колових орбітах, то

$$v_{2y}(0) = \sqrt{Gm_1/R}. \quad (7)$$

Якою ж має бути  $v_{1y}(0)$ ? Знаходячись весь час на одній прямій, обидва тіла мають однакові періоди обертання  $T_1 = T_2$ . Але  $T_1 = 2\pi r_1/v_1$  і  $T_2 = 2\pi r_2/v_2$ , звідки  $v_2/v_1 = r_1/r_2$ , що в проекціях на вісь  $Y$  дає  $v_{2y}(0)/v_{1y}(0) = x_1(0)/x_2(0)$ . Звідси маємо:

$$v_{1y}(0) = v_{2y}(0) \cdot x_1(0)/x_2(0). \quad (8)$$

Вирази для  $x_2(0), x_1(0), v_{2y}(0)$  і  $v_{1y}(0)$  будуть внесені у відповідні комірки таблиці під умовою і обчислюватимуться автоматично згідно (6), (7), (8).

#### Обговорення алгоритму

Оскільки тепер розглядається рух двох тіл, то природно виникає необхідність у збільшенні вдвічі кількості змінних (а отже, й стовпців таблиці):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$a_{1x}$	$a_{1y}$	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{1x}$	$v_{1y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	Дано:	Значення
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Крім того, вимагає збільшення й кількість рядків (250-300), тому що помітно зростає період обертання компонентів системи, а просте збільшення інтервалу  $\Delta t$  при попередніх 100 рядках таблиці вже не забезпечує необхідної точності обчислень.

Вміст комірок цієї таблиці:

комірки	формули/числа	коментарі
N7	0	
N8	=N10*N11/N13	
N9	0	
N10	=(N2*N4*N13)^0,5/N6	
N11	=N6/(1+N4/N5)	
N12	0	

комір-ки	формули/числа	коментарі
N13	=N6/(1+N5/N4)	
N14	0	
A2	=N2*N5*(K2-I2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в A3, A4
B2	=N2*N5*(L2-J2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в B3, B4
C2	=N2*N4*(I2-K2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в C3, C4
D2	=N2*N4*(J2-L2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в D3, D4
E2	=N7	
F2	=N8	
G2	=N9	
H2	=N10	
I2	=N11	
J2	=N12	
K2	=N13	
L2	=N14	
E3	=E2+A2*N3*0,5	
F3	=F2+B2*N3*0,5	
G3	=G2+C2*N3*0,5	
H3	=H2+D2*N3*0,5	
I3	=I2+E3*N3	копіювати в I4
J3	=J2+F3*N3	копіювати в J4
K3	=K2+G3*N3	копіювати в K4
L3	=L2+H3*N3	копіювати в L4
E4	=E3+A3*N3	
F4	=F3+B3*N3	
G4	=G3+C3*N3	
H4	=H3+D3*N3	

**Порядок роботи.**

1. Заповнити комірки N2-N6 у відповідності до даних задачі.
2. Заповнити комірки за наведеною вище таблицею.
3. Всі формули 4-го рядка копіювати у наступні до останнього включно.
4. Побудувати графіки за даними стовпців I, J, K, L.

*Увага!* Виконання цього пункту виявиться успішним, якщо правильно відкоригувати ряди даних.

**Обчислювальний експеримент**

**Задача 1.** Відомо, що маса Місяця ( $m_2$ ) у 81 раз менша за масу Землі ( $m_1$ ). Приймаючи відстань  $R$  між центрами цих тіл рівною 380 тис. км ( $3,8 \cdot 10^8$  м), змодельовувати рух Місяця й Землі.

1. Уведемо ці дані до таблиці:

комірка N4 =  $5,98 \cdot 10^{24}$ ;  
 комірка N5 =  $5,98 \cdot 10^{24}/81$ ;  
 комірка N6 =  $3,8E+08$ ;  
 комірка N3 =  $8,64E+04$  (1 доба в секундах).

2. Побудуємо графіки  $y_1 = y_1(x_1)$  і  $y_2 = y_2(x_2)$  – траєкторії руху (рис. 6).

Маленьке коло в центрі рис. 6 – це орбіта Землі. Її центр знаходиться трохи лівіше від точки перетину осей – центра мас системи.

**Завдання 3.** Переконайтесь, що дана модель містить у собі попередню (про рух штучного супутника), якщо перейти до попередніх умов.

**Завдання 4.** Самостійно розв'яжіть задачу.

**Задача 2.** Якби на місці Місяця знаходилась планета з масою утричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти цих тіл?

Після коригування даних у відповідних комірках таблиці отримуємо результат (рис. 7).

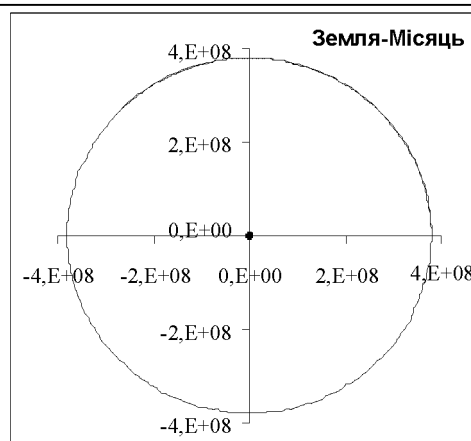


Рис. 6.

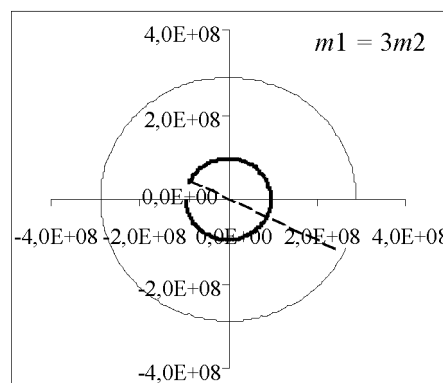


Рис. 7.

При побудові цього рисунку в електронній таблиці доцільно час моделювання обмежити так, щоб тіла не виконали й одного повного оберту. Довжина штрихового відрізка прямої, що сполучає точки траєкторій у останній момент руху, дорівнює сталій відстані  $R$  між тілами, як про це йшлося вище. Крім того, стають зрозумілими напрями руху кожного з тіл.

Таким чином, ми безпосередньо підійшли до моделювання руху компонентів у системах, що зветься фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння, та обертаються по еліптичних орбітах навколо спільно центра мас. Виявляється, остання модель передбачає такі об'єкти. Тут ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які є вживаними в зоряній астрономії: одиницею маси є маса Сонця ( $1 M_C = 1,99 \cdot 10^{30}$  кг), одиницею довжини є парсек ( $1 \text{ пк} = 3,08 \cdot 10^{14}$  м), одиницею часу є 1 земний рік ( $3,15 \cdot 10^7$  с). Згаданий перехід фактично стосується числового значення розмірного коефіцієнта  $G$  у законі всесвітнього тяжіння.

Пропонуємо учням пригадати, у який спосіб виконують подібні операції. В разі утруднення надаємо допомогу:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{1}{3,08 \cdot 10^{14}}\right)^3 \text{ пк}^3}{\left(\frac{1}{1,99 \cdot 10^{30}}\right) M_C \cdot \left(\frac{1}{3,15 \cdot 10^7}\right)^2 \text{ рік}^2}$$

$$\text{Остаточно маємо } G = 67,6 \frac{\text{пк}^3}{M_C \cdot \text{рік}^2}$$

Така вправа, на наш погляд, є корисною для учнів, оскільки розкриває зміст часто звичаної фрази: «Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць вимірювання величин».

Після виконання наведених перетворень пропонуємо розв'язати задачу:

**Задача 3.** Змоделувати орбіти компонентів системи подвійної зірки за умови, що до її складу входять зірки з масами  $m_1 = 1 M_C$  та  $m_2 = 3 M_C$ , розташовані на відстані  $R = 0,5$  пк.

Пропонуючи учням виконати моделювання у новій системі одиниць, уточнюємо разом з ними новий вміст комірок N2-N6:

комірка N2: = 67,6; комірка N3: =  $4,5 \cdot 10^{-4}$ ; комірка N4: = 3; комірка N5: = 1; комірка N6: = 0,5.

За умови, що  $v_y(0)$  – вміст комірки N10 – дорівнює числовому значенню швидкості, яка забезпечує колову орбіту, матимемо вже знайомий результат з коловими орбітами (рис. 8), а у випадку її збільшення в 1,25 рази з одночасним збільшенням  $\Delta t$  (комірка N3) до  $2 \cdot 10^{-3}$  орбіти перетворюються на еліптичні (рис. 9).

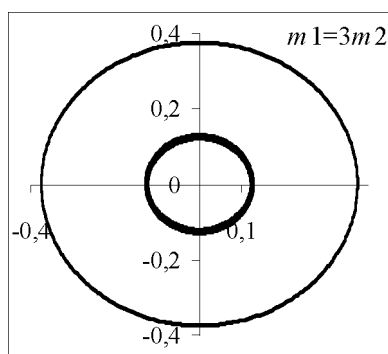


Рис. 8.

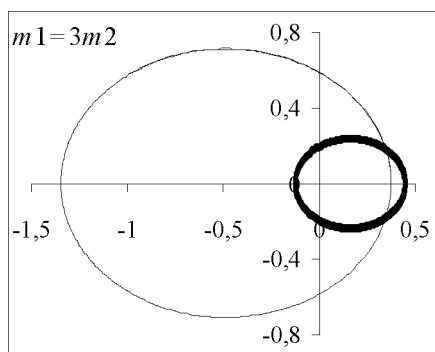


Рис. 9.

**Зауваження.** Моделювання декількох обертів системи подвійної зірки за допомогою 300-рядкової таблиці є недоцільним, оскільки похибка обчислень у цьому випадку призводить до хибних висновків про поведінку системи. Для одержання достатньої точності обчислень необхідно було б збільшити кількість рядків мінімум на порядок з відповідним зменшенням проміжку  $\Delta t$ . У [3] показано, що в цьому випадку розумним є перехід від електронних таблиць до іншого середовища моделювання.

З підручників фізики школярам відомо, що у межах Сонячної системи закон всесвітнього тяжіння і решта законів Ньютона є абсолютно правильними. Адже саме на основі цих законів свого часу були відкриті дві до того невідомі планети. Ці ж закони покладені в основу розрахунків траєкторій космічних апаратів і підтверджуються усім досвідом практичної космонавтики. Чи можна стверджувати, що на міжзоряних відстанях, значно більших за розміри Сонячної системи, ці закони також справджуються? Позитивну відповідь астрономи знаходять, спостерігаючи системи подвійних зірок. На рис. 10 подана фотографія, отримана в результаті ретельних спостережень протягом 42 років за відносними позиціями компонентів подвійної зірки Сиріус.

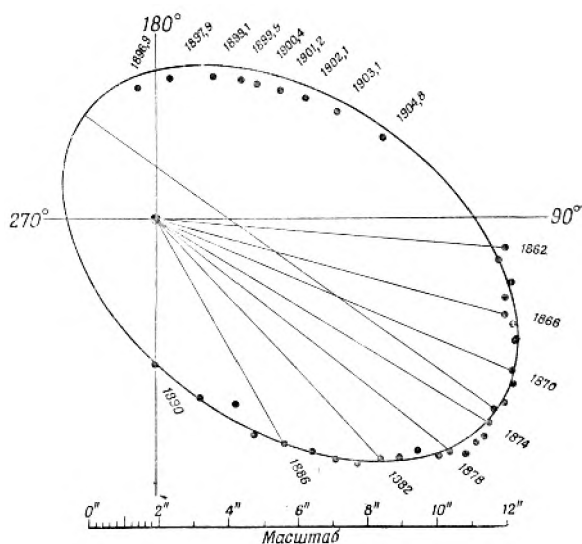


Рис. 10

Як говорять, коментарі зайві. Не дуже важко зрозуміти, що подібну картину руху можна одержати, якщо в таблиці, яка відповідає рис. 9, реалізувати умову  $m_2 \ll m_1$  і узгодити масштаби на координатних осях. Дуже бажано, щоб учні виконали таку вправу.

У сучасній астрофізиці закон тяжіння відіграє важливу роль при описі процесів, що відбуваються на різних стадіях еволюції зірок.

### 3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння

Як відомо, закон всесвітнього тяжіння був відкритий Ньютоном помітно пізніше від законів Кеплера і виявився їх теоретичним узагальненням. Якщо закони Кеплера сформульовані лише для планет і передбачають лише еліптичні орбіти, то закон всесвітнього тяжіння описує гравітаційні взаємодії будь-яких тіл, орбіти яких за певних умов можуть бути не лише еліпсами, а й параболою або гіперболою. Саме тому при перевірці законів Кеплера ми маємо право розглядати рух штучного супутника, а не планети. Суть нашого підходу полягає у такому: якщо стверджується, що траєкторією руху є одна з кривих другого порядку, то всі її точки мають задовольняти означенню даної кривої. На наш погляд, це єдиний спосіб відрізнити еліпс від овалу чи параболу від гіперболи.

**Перший закон Кеплера:** Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

**Означення.** Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою.

На рис. 11 показані:  $F_1, F_2$  – фокуси еліпса;  $2a$  – велика вісь;  $2b$  – мала вісь.

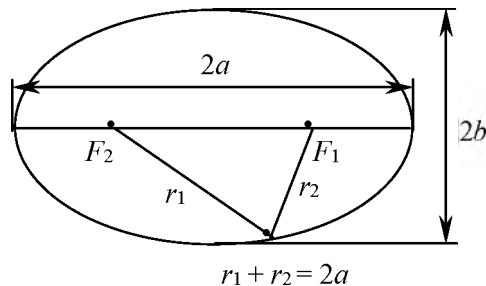


Рис. 11

Коло є окремим випадком еліпса за умови, що його фокуси співпадають.

Повернемось до таблиці, що відображає рух штучного супутника Землі, і до рис. 3. На основі закону

тяжіння ми розрахували координати точок його орбіти, що відповідають послідовним однаковим проміжкам часу  $\Delta t$ , і за цими координатами побудували саму орбіту. Той факт, що орбіта є еліпсом, учні зазвичай сприймають на віру. Проте застосування комп'ютера дозволяє організувати дослідження, спрямоване на з'ясування форми траєкторії.

Якщо траєкторія дійсно є еліпсом, а центральне тіло знаходиться у фокусі  $F_1$ , то для всіх точок такої траєкторії повинна виконуватись рівність

$$r_1 + r_2 = 2a = const.$$

Цей факт і підлягає перевірці шляхом обчислювального експерименту.

**Порядок роботи.**

1. Допишемо до умови (у стовпці G та H) значення параметрів  $x_{max}$ ,  $x_{min}$ ,  $a$ , та  $x$ -координат фокусів  $x_{(F1)}$  та  $x_{(F2)}$  поки що гіпотетичного еліпса.

2. Додаємо до таблиці три нові стовпці I, J, K, у яких будемо розміщувати результати розрахунків значень змінних  $r_1$ ,  $r_2$ , та  $r_1 + r_2$ . Довжини відрізків  $r_1$  та  $r_2$  обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців.

Уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа
H10	=МАКС(E2:E250)
H11	=МИН(E2:E250)
H12	=0,5*ABS(H10-H11)
H13	0,00
H14	=H11+H10
I3	=((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
J3	=((H\$14-E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
K3	=I3+J3

3. Формули комірок I3, J3 та K3 копіюємо до самого низу таблиці (кожну у своєму стовпці), так що фактично перевіркою охоплюються всі точки, за якими була побудована траєкторія.

На рис. 12 наведені результати дослідження.

...	E	F	G	H	I	J	K
1	...	$x$	$y$	Дано:	ШСЗ	Перший закон Кеплера	
2	...	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11	$r_1$	$r_2$
3	...	6,68E+06	5,55E+05	$\Delta t=$	60	6,70	17,27
4	...	6,64E+06	1,11E+06	$M=$	5,976E+24	6,71	17,26
5	...	6,56E+06	1,66E+06	$r=$	6,700E+06	6,73	17,24
6	...	6,45E+06	2,20E+06	$v_x(0)=$	0	6,76	17,20
7	...	6,31E+06	2,73E+06	$v_y(0)=$	9,26E+03	6,81	17,15
8	...	6,14E+06	3,24E+06	$x(0)=$	6,700E+06	6,87	17,09
9	...	5,95E+06	3,75E+06	$y(0)=$	0	6,95	17,02
10	...	5,73E+06	4,24E+06	$x_{max}=$	6,70E+06	7,03	16,94
11	...	5,49E+06	4,71E+06	$x_{min}=$	-1,73E+07	7,13	16,84
12	...	5,23E+06	5,16E+06	$a=$	1,20E+07	7,23	16,73
13	...	4,95E+06	5,60E+06	$x_{r1}=$	0,00	7,35	16,62
14	...	4,65E+06	6,01E+06	$x_{r2}=$	-1,06E+07	7,47	16,49
...	...	...	...	...	...	...	...

Рис. 12.

Такі гарні результати завжди викликають почуття недовіри у фізика, котрий справедливо вимагає пояснень. Дамо їх.

1. Точність кінцевого результату ( $r_1 + r_2$ ) має бути не гіршою за точність обчислення координат точок орбіти, тому що розрахунки значень  $r_1$  і  $r_2$  ведуться саме за цими точками.

2. В означеній ситуації варто нагадати учням, що точність результату насамперед визначається точністю даних, що входять до умови задачі (вхідних даних), а велика кількість десяткових розрядів (як і в мікрокалькуляторах) є лише результатом виконання обчислювальної операції.

3. Таким чином, при русі тіла під дією сили тяжіння траєкторія, якщо вона замкнута (фінітна), виявляється еліпсом, у одному з фокусів якого знаходиться центральне тіло.

**Примітка.** Аналогічно, виходячи з означень параболи і гіперболи, можна виконати дослідження траєкторій для  $v_y(0) = \sqrt{2} v_{лк}$  та  $v_y(0) > \sqrt{2} v_{лк}$ .

**Другий закон Кеплера:** Напрявлений відрізок, що сполучає Сонце й планету (радіус-вектор планети) за однакової проміжки часу описує (замітає) рівні площі (рис. 13).

Експериментальна перевірка другого закону Кеплера є не менш корисною, ніж попередня.

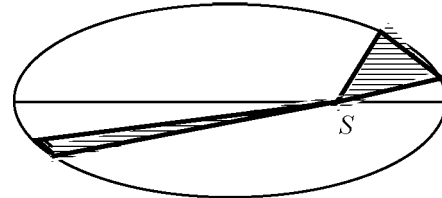


Рис. 13

На рис. 14 показані два радіуси-вектори  $r_i$  і  $r_{i+1}$ , що відповідають початку і кінцю  $i$ -го проміжку часу  $\Delta t$ . Дуга, що стягує їхні кінці, з достатнім наближенням може бути замінена хордою  $d_{i+1}$ . Шукаю площу знайдемо за формулою Герона.

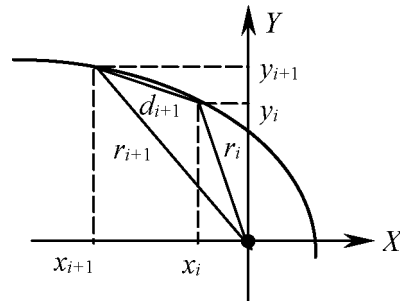


Рис. 14

**Порядок роботи.**

1. Додаємо до таблиці п'ять нових стовпців L, M, N, O, P. У них будуть заноситися результати обчислення сторін трикутника, півпериметра та площі.

2. Довжини всіх відрізків, як і раніше, обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців.

Уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа
L3	=((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000
M3	=((E3)^2+(F3)^2)^0,5/1000000
N3	=((E3-E2)^2+(F3-F2)^2)^0,5/1000000
O3	=0,5*(L3+M3+N3)
P3	=(O3*(O3-L3)*(O3-M3)*(O3-N3))^0,5

На рис. 15 подано відповідний фрагмент доповненої таблиці:

...	L	M	N	O	P	
1	...	Другий закон Кеплера				
2	...	$r_i$	$r_{i+1}$	$l_{i+1}$	$p_i$	$S_i$
3	...	6,70	6,71	0,56	6,98	1,86
4	...	6,71	6,73	0,55	7,00	1,86
5	...	6,73	6,76	0,55	7,02	1,86
6	...	6,76	6,81	0,55	7,06	1,86
7	...	6,81	6,87	0,55	7,12	1,86
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 15.

Отже, дослідна перевірка другого закону Кеплера підтверджує його справедливості.

Перевірку третього закону Кеплера можна здійснити, маючи дві таблиці, побудовані для двох пар тіл, або одержати його як теоретичний наслідок закону всесвітнього тяжіння (найпростіше — у припущенні колових орбіт):

$$T = 2\pi R / v; v = \sqrt{GM_C / R} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 R^3 / GM_C \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1^2 / T_2^2 = R_1^3 / R_2^3.$$

**Висновки**

1. Багато задач про рухи тіл під дією змінних сил можуть бути розв'язані наближено з достатньо високою точністю за допомогою чисельного аналізу, коли застосування аналітичних методів виявляється з різних причин неможливим. Саме тому автори факультативних курсів фізики (наприклад, [1, с.81-90]) вважають доцільним ознайомлення школярів з основами чисельного аналізу.

2. Завдяки здатності опрацьовувати великі обсяги інформації з високою швидкістю комп'ютер виявляється ідеальним засобом для реалізації чисельних методів.

3. Поданий вище матеріал досягне своєї навчально-виховної мети у повній мірі лише при активній участі школярів у процесі створення моделей.

**Список використаних джерел:**

1. *Кабардин О.Ф.* и др. Факультативный курс физики, 8 кл.: Пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1973. — 206 с.  
 2. *Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф.* Фізика, 9 кл.: Підруч. для серед. шк. — Київ-Ірпінь: Перун, 2002. — 232 с.: іл.

3. *Соловійов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О.* Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2000. — № 2. — С.28-32.  
 4. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Комп'ютерне моделювання механічних рухів у середовищі електронних таблиць // Фізика та астрономія в школі. — 2002. — № 5. — С.40-46.  
 5. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Методика ознайомлення школярів з поняттям фазового простору в курсі фізики // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 9: Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т, інформаційно-видавничий відділ, 2003. — С.163-165.  
 6. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Факультативний курс "Основи комп'ютерного моделювання" // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. пед. ун-т, інформаційно-видавничий відділ, 2002. — С.210-217.  
 7. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 267 с.  
 8. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Мир, 1969. — 624 с.

Отримано: 30.03.2004

УДК 624.072.21/23

**В.С.Ткачук, В.С.Стукотілов, В.В.Девін**

*Подільська державна аграрно-технічна академія*

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Викладена методика розв'язку задач дослідження напружено-деформованого стану шарнірно-стержневих систем з застосуванням методу кінцевих елементів. Використана оригінальна програма на алгоритмічній мові для формування матриці жорсткості системи й автоматизації всіх розрахунків.

Приведені приклади розв'язку задач аналітичним (метод сил) та машинним методами.

Method of decision of tasks of research of the tense-deformed state of the joint- pivotal systems laid out with the use of method of eventual elements. Used original program in algorithmic language for forming of matrix of inflexibility of the system and automation of all calculations.

Resulted attach the upshot of tasks by analytical (method of forces) and machine methods.

Для опанування методикою розрахунків ферм, підвісок і т.і. при довільній системі навантажень в навчальних цілях розглядаються малоелементні системи й використовуються аналітичні методи визначення зусиль в елементах таких систем (вирізання вузлів, проєкцій, моментних точок) [1, 2, 4]. Класичні методи розкриття статичної невизначності (методи сил, переміщень, змішаний) є обов'язковими для засвоєння інженером-будівельником, бо саме їх застосування дозволяє ставити й розв'язувати реальні задачі в усій їх повноті. Зокрема, цьому питанню присвячена робота [3] при розв'язанні деяких специфічних задач.

В даній роботі розглянуто застосування методу кінцевих елементів для довільних шарнірно-стержневих систем. Авторами складена оригінальна програма для розрахунку плоских ферм довільної конфігурації при будь-яких способах закріплення. Головною рисою програми є те, що при побудові матриці жорсткості системи не використовується структурна матриця і не виникає потреби в громіздких проміжних операціях над матрицями. Програма повністю автоматизує розрахунок як статично визначних, так і статично невизначних ферм.

**1. Аналітичний розв'язок.** Розглядається плоска шарнірно-стержнева система (ШСС), в якій  $m$  вузлів з'єднують  $n$  стержнів. Вважаємо відомою геометрію сис-

теми в системі координат  $xOy$ , довжини  $l_i$  елементів шарнірно-стержневої системи, кути їх нахилу  $\alpha_i$  до осі  $x$ . По довжині стержнів жорсткості їх перерізів постійні

$$E_i F_i = const,$$

де  $E_i$  — модуль пружності матеріалу,  $F_i$  — площі перерізів. Система закріплена за допомогою  $k$  опорних стержнів в вузлах; навантаження  $P_i$  розглядаються теж тільки як вузлові. Ставиться повна задача дослідження НДС, а саме знаходження зусиль  $N_i$  в стержнях, опорних реакцій  $R_p$ , подовжень  $\Delta_i$  стержнів, переміщень  $U_p, V_k$  вузлів, напружень  $\sigma_i$  в перерізах стержнів.

Послідовно вирізаємо вузли, починаючи з вузла, в якому сходяться не більше двох стержнів. Складаємо рівняння рівноваги у вигляді (мал. 1)

$$\sum_{j=1}^r N_j \cos \alpha_j + P_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^r N_j \sin \alpha_j + P_{y_i} = 0, \tag{1}$$

де  $r$  — кількість стержнів, що сходяться в вузлі  $i$ .

Пронумеруємо вузли й стержні:  $m = 5; n = 7; k = 3$ . Значення відносних модулів пружності  $\beta = E / E_1$  та відносних площ перерізів  $\gamma = F / F_1$  приведені в таблиці 1.