

$$T = 2\pi R / v; v = \sqrt{GM_C / R} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 R^3 / GM_C \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1^2 / T_2^2 = R_1^3 / R_2^3.$$

**Висновки**

1. Багато задач про рухи тіл під дією змінних сил можуть бути розв'язані наближено з достатньо високою точністю за допомогою чисельного аналізу, коли застосування аналітичних методів виявляється з різних причин неможливим. Саме тому автори факультативних курсів фізики (наприклад, [1, с.81-90]) вважають доцільним ознайомлення школярів з основами чисельного аналізу.

2. Завдяки здатності опрацьовувати великі обсяги інформації з високою швидкістю комп'ютер виявляється ідеальним засобом для реалізації чисельних методів.

3. Поданий вище матеріал досягне своєї навчально-виховної мети у повній мірі лише при активній участі школярів у процесі створення моделей.

**Список використаних джерел:**

1. *Кабардин О.Ф.* и др. Факультативный курс физики, 8 кл.: Пособие для учащихся. — М.: Просвещение, 1973. — 206 с.  
 2. *Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф.* Фізика, 9 кл.: Підруч. для серед. шк. — Київ-Ірпінь: Перун, 2002. — 232 с.: іл.

3. *Соловійов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О.* Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2000. — № 2. — С.28-32.  
 4. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Комп'ютерне моделювання механічних рухів у середовищі електронних таблиць // Фізика та астрономія в школі. — 2002. — № 5. — С.40-46.  
 5. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Методика ознайомлення школярів з поняттям фазового простору в курсі фізики // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 9: Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун-т, інформаційно-видавничий відділ, 2003. — С.163-165.  
 6. *Теплицький І.О., Семеріков С.О.* Факультативний курс "Основи комп'ютерного моделювання" // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту: Серія педагогічна. Вип. 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. пед. ун-т, інформаційно-видавничий відділ, 2002. — С.210-217.  
 7. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 267 с.  
 8. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Мир, 1969. — 624 с.

Отримано: 30.03.2004

УДК 624.072.21/23

**В.С.Ткачук, В.С.Стукотілов, В.В.Девін**

*Подільська державна аграрно-технічна академія*

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Викладена методика розв'язку задач дослідження напружено-деформованого стану шарнірно-стержневих систем з застосуванням методу кінцевих елементів. Використана оригінальна програма на алгоритмічній мові для формування матриці жорсткості системи й автоматизації всіх розрахунків.

Приведені приклади розв'язку задач аналітичним (метод сил) та машинним методами.

Method of decision of tasks of research of the tense-deformed state of the joint- pivotal systems laid out with the use of method of eventual elements. Used original program in algorithmic language for forming of matrix of inflexibility of the system and automation of all calculations.

Resulted attach the upshot of tasks by analytical (method of forces) and machine methods.

Для опанування методикою розрахунків ферм, підвісок і т.і. при довільній системі навантажень в навчальних цілях розглядаються малоелементні системи й використовуються аналітичні методи визначення зусиль в елементах таких систем (вирізання вузлів, проекцій, моментних точок) [1, 2, 4]. Класичні методи розкриття статичної невизначності (методи сил, переміщень, змішаний) є обов'язковими для засвоєння інженером-будівельником, бо саме їх застосування дозволяє ставити й розв'язувати реальні задачі в усій їх повноті. Зокрема, цьому питанню присвячена робота [3] при розв'язанні деяких специфічних задач.

В даній роботі розглянуто застосування методу кінцевих елементів для довільних шарнірно-стержневих систем. Авторами складена оригінальна програма для розрахунку плоских ферм довільної конфігурації при будь-яких способах закріплення. Головною рисою програми є те, що при побудові матриці жорсткості системи не використовується структурна матриця і не виникає потреби в громіздких проміжних операціях над матрицями. Програма повністю автоматизує розрахунок як статично визначних, так і статично невизначних ферм.

**1. Аналітичний розв'язок.** Розглядається плоска шарнірно-стержнева система (ШСС), в якій *m* вузлів з'єднують *n* стержнів. Вважаємо відомою геометрію сис-

теми в системі координат *xOy*, довжини *l<sub>i</sub>* елементів шарнірно-стержневої системи, кути їх нахилу *α<sub>i</sub>* до осі *x*. По довжині стержнів жорсткості їх перерізів постійні

$$E_i F_i = const,$$

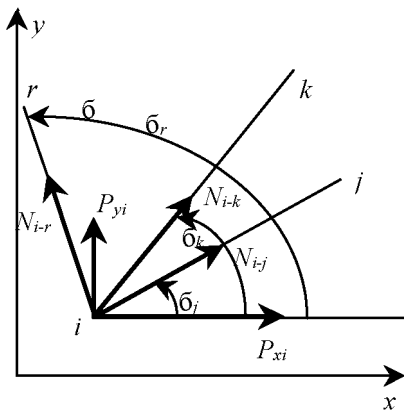
де *E<sub>i</sub>* – модуль пружності матеріалу, *F<sub>i</sub>* – площі перерізів. Система закріплена за допомогою *k* опорних стержнів в вузлах; навантаження *P<sub>i</sub>* розглядаються теж тільки як вузлові. Ставиться повна задача дослідження НДС, а саме знаходження зусиль *N<sub>i</sub>* в стержнях, опорних реакцій *R<sub>к</sub>*, подовжень *Δ<sub>i</sub>* стержнів, переміщень *U<sub>к</sub>*, *V<sub>к</sub>* вузлів, напружень *σ<sub>i</sub>* в перерізах стержнів.

Послідовно вирізаємо вузли, починаючи з вузла, в якому сходяться не більше двох стержнів. Складаємо рівняння рівноваги у вигляді (*мал. 1*)

$$\sum_{j=1}^r N_j \cos \alpha_j + P_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^r N_j \sin \alpha_j + P_{y_i} = 0, \tag{1}$$

де *r* – кількість стержнів, що сходяться в вузлі *i*.

Пронумеруємо вузли й стержні: *m* = 5; *n* = 7; *k* = 3. Значення відносних модулів пружності *β* = *E* / *E<sub>1</sub>* та відносних площ перерізів *γ* = *F* / *F<sub>1</sub>* приведені в *таблиці 1*.



Мал. 1. Рівновага системи

Розглядаємо геометрію системи. Довжини стержнів:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 6,5^2} = 7,63 \text{ м}; l_3 = \sqrt{3^2 + 6,5^2} = 7,16 \text{ м}$$

і т. д.

Кути нахилу стержнів:

$$\cos \alpha_2 = 4 / 7,63 = 0,524;$$

$$\sin \alpha_2 = 6,5 / 7,63 = 0,852; \alpha_2 = 58,4^\circ$$

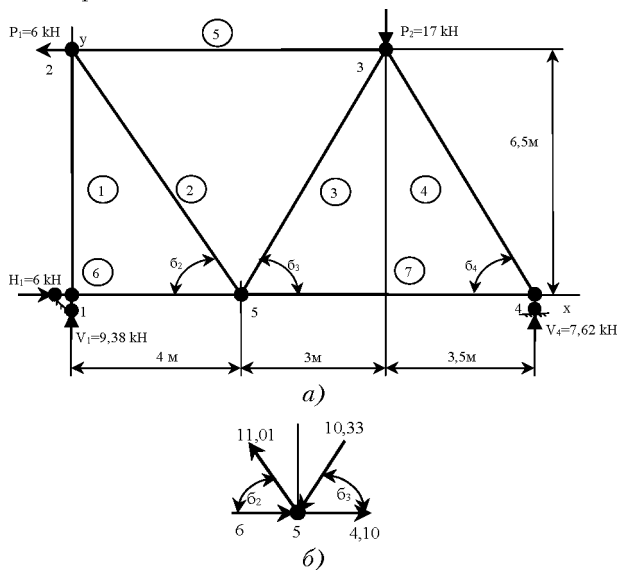
$$\cos \alpha_3 = 3 / 7,16 = 0,419;$$

$$\sin \alpha_3 = 6,5 / 7,16 = 0,908; \alpha_3 = 65,2^\circ$$

і т. д.

Для визначення опорних реакцій складаємо рівняння рівноваги.

Приклад.



Мал. 2. Схема шарнірно-стержневої системи

Таблиця 1

Стержні	$\beta = \frac{E}{E_1}$	$\gamma = \frac{F}{F_1}$	$l, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град}$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$N, \text{ кН}$	$\Delta \bar{l}, \text{ кН} \cdot \text{ м}$
1	1	1	6,5	90	0	1	-9,38	-60,97
2	0,6	2	7,63	58,4	0,524	0,852	11,01	70,0
3	1	4	7,16	65,2	0,419	0,908	-10,33	-18,49
4	0,5	1	7,38	61,7	0,474	0,881	-8,65	-127,67
5	0,4	2,5	7	0	1	0	0,23	1,61
6	1	0,7	4	0	1	0	-6	-34,29
7	0,8	3	6,5	0	1	0	4,10	11,1

Для визначення зусиль  $N_i$  в стержнях системи вирізаємо послідовно вузли, починаючи, наприклад, з вузла 1. Дані заносимо в таблицю 1. Тут приводимо тільки рівновагу вузла 5, використану для перевірки – мал. 2 б.

$$\sum X = 6 + 4,10 - 11,01 \cdot 0,524 - 10,33 \cdot 0,419 = 10,1 - 10,1 \equiv 0$$

$$\sum Y = 11,01 \cdot 0,852 - 10,33 \cdot 0,908 = 9,38 - 9,38 \equiv 0.$$

Подовження стержнів визначаємо за законом Гука

$$\Delta l_i = N_i l_i / E_i F_i . \quad (2)$$

В таблиці 1 приведено умовні подовження  $\Delta \bar{l} = Nl / \beta \gamma$ . Так

$$\Delta l_1 = -9,38 \cdot 6,5 / 1 \cdot 1 = -60,97 \text{ (укорочення),}$$

$$\Delta l_2 = 11,01 \cdot 7,63 / 0,6 \cdot 2 = 70,0 \text{ і т.д.}$$

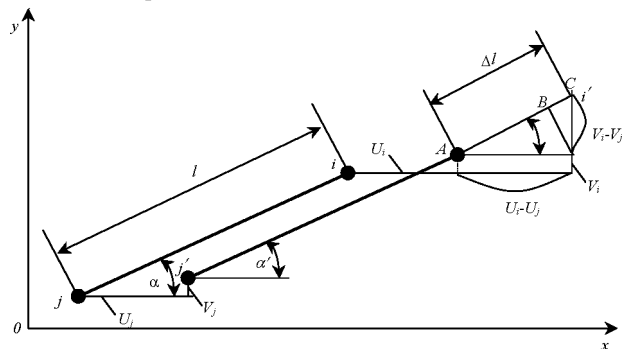
**2. Машинний розв'язок.** Досліджувана конструкція розбивається на окремі елементи, НДС яких вважається відомим. Виходячи з умов рівноваги та умов нерозривності переміщень, виконується спряження таких елементів. При цьому формулюються три групи рівнянь:

а) статичні (рівновага системи); б) геометричні (зв'язок між деформаціями та переміщеннями); в) фізичні (зв'язок між силами та деформаціями).

Розглянемо реалізацію методу кінцевих елементів (МКЕ) для шарнірно-стержневої системи. ПСС розглядаємо як сукупність  $m$  вузлів і  $n$  стержнів. Вважаємо, що навантаження  $P_i$  прикладені тільки в вузлах ферми; так як поздовжні зусилля  $N_i = const$  вздовж довжини стержнів, то маємо однорідний напружений стан.

**Статичний бік задачі.** Вирізаємо  $i$ -й вузол (див. мал. 1) й складаємо рівняння рівноваги виду (1), при цьому в число зусиль  $P_i$  можуть входити і невідомі опорні реакції. Такі рівняння записуємо для всіх  $m$  вузлів.

**Геометричний бік задачі.**



Мал. 3. Схема до розрахунку переміщень

Позначимо через  $U, V$  проекції переміщень вузлів; вузли  $i, j$  після деформації змістились в положення  $i', j'$ . В зв'язку з малістю деформацій приймаємо для кутів  $\alpha' \approx \alpha$ . Подовження стержня  $\Delta l = AB + BC$ , або

$$\Delta l = (U_i - U_j) \cdot \cos \alpha + (V_i - V_j) \cdot \sin \alpha . \quad (3)$$

**Фізичний бік задачі.** По закону Гука подовження стержня  $\Delta l = N G$ , де позначена умовна обернена жорсткість стержня (податливість)

$$G = l / EF . \quad (4)$$

**Синтез.** Порівнюючи вирази для  $\Delta l$  з (12) та (13) й зібравши подібні члени з  $U_i, V_i, U_s, V_s, \dots, U_t, V_t$  ( $s, t$  – номери всіх вузлів, суміжних з  $i$  – м вузлом), прийдемо до системи  $2m$  лінійних рівнянь з невідомими переміщеннями  $U_j, V_j$ . Запишемо систему в матрично-матричному вигляді

$$\bar{R} \cdot \bar{U} = \bar{P},$$

де  $\bar{R}$  – матриця системи, яка фізично означає матрицю жорсткості всієї шарнірно-стержневої системи;  $\bar{U}$  – вектор невідомих переміщень;  $\bar{P}$  – вектор зусиль:

$$\bar{U}^* = (U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_m, V_m);$$

$$\bar{P}^* = (P_{X1}, P_{Y1}, P_{X2}, P_{Y2}, \dots, P_{Xk}, P_{Yk})$$

Матриця жорсткості має блочний вигляд і є симетричною відносно головної діагоналі. Діагональні й побічні блоки 2 Ч 2 мають відповідно вигляд:

$$\begin{pmatrix} \sum_r (\cos^2 \alpha_j / G_j) & \sum_r (\cos \alpha_j \sin \alpha_j / G_j) \\ \sum_r (\cos \alpha_j \sin \alpha_j / G_j) & \sum_r (\sin^2 \alpha_j / G_j) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$- \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha_S / G_S & \cos \alpha_S \sin \alpha_S / G_S \\ \cos \alpha_S \sin \alpha_S / G_S & \sin^2 \alpha_S / G_S \end{pmatrix}.$$

При наявності  $k$  опорних стержнів “стискаємо” матрицю  $\bar{R}$ , викидаючи з неї відповідні рядки й стовпці, тобто приходимо до системи

$$\bar{Z} \cdot \bar{U}_1 = \bar{P}_2, \quad (6)$$

де  $\bar{U}_1, \bar{P}_2$  – “стиснуті” вектори  $\bar{U}$  і  $\bar{P}$ . Розв’язок системи (9) має вигляд

$$\bar{U}_j = \bar{B}_1 \cdot \bar{P}_2, \quad (7)$$

де  $\bar{B}_1 = \bar{Z}_1^{-1}$  – обернена матриця до матриці  $\bar{Z}_1$ ; фізично вона означає матрицю податливості системи. Знайшовши переміщення  $U, V$  вузлів шарнірно-стержневої системи, подальший розв’язок зводимо до повного дослідження НДС системи.

Зупинимося на алгоритмі формування матриці жорсткості. Нехай задані структурні вектори  $\bar{a}(n), \bar{e}(n)$ , попарними елементами яких є номери вузлів, які з’єднує відповідний стержень.

Тоді формуємо вектори  $\bar{C}_1(n), \bar{C}_2(n), \bar{C}_3(n)$  з елементами відповідно

$$\begin{aligned} c_{1i} &= \cos^2 \alpha_i / G_i; c_{2i} = \sin^2 \alpha_i / G_i; \\ c_{3i} &= \cos \alpha_i \sin \alpha_i / G_i. \end{aligned} \quad (8)$$

### Інструкція по використанню програми

Результати розв’язку виводяться в табличному вигляді на екран чи принтер.

При виведенні частини розв’язку на екран для продовження виконують команду “продовжити” (CONTINUE), клавіша F5.

### Розв’язання задачі на ЕОМ

1. Знаходячись в Бейсік-системі, завантажити програму командою:

LOAD “SV 30”

(SV 24 – ім’я програмного файлу; команду LOAD завантажують клавішею F3).

2. Запустити програму на виконання командою:

RUN (клавіша F2).

3. Вступивши в діалог з комп’ютером, ввести дані, закінчивши кожне введення клавішею

ENTER.

Вводимо наступні дані:

$m$  – кількість вузлів;  $x, y$  – координати вузлів попарно, в метрах;  $n$  – кількість стержнів;  $a, b$  – елементи структурних векторів попарно;  $\bar{E}$  – відносні модулі пружності матеріалу стержнів ( $\bar{E} = E / E_1$ );  $\bar{F}$  – відносні площі поперечних перерізів стержнів ( $\bar{F} = F / F_1$ );  $KS$  – кількість опорних стержнів;  $C$  – номери опорних стержнів в вузлах шарнірно-стержневої системи (для вузла  $i$  горизонтальні опорні

стержні мають номери  $2i - 1$ , вертикальні –  $2i$ );  $KZ$  – кількість вузлових навантажень;  $n, P$  – номери вузлових навантажень та їх значення попарно; розмірність  $P$  [кН] (номери  $n$  навантажень  $P$  визначаються аналогічно номерам опорних стержнів).

4. Вибрати приймач результатів – екран чи принтер.

**Приклад.** Статично визначна система (мал. 2). Початок координат в вузлі 1. Координати вузлів приведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Вузли	1	2	3	4	5
$x, м$	0	0	7	10,5	4
$y, м$	0	6,5	6,5	0	0

Враховуючи нумерацію вузлів та стержнів, запишемо структурні вектори  $\bar{a}, \bar{b}$  – таблиця 3.

Таблиця 3.

Стержні	1	2	3	4	5	6	7
$a$	1	2	3	3	2	1	4
$b$	2	5	5	4	3	5	5

Складемо вектор закріплення, застосовуючи наступний принцип нумерації опорних стержнів для  $i$ -го вузла:  $2i - 1$  – для горизонтальних стержнів,  $2i$  – для вертикальних стержнів.

Для вузлів 1,4 маємо:  $\bar{C} = (1,2,8)$ ;  $k = 3$ .

Складемо вектори вузлових навантажень  $\bar{N}, \bar{P}$ , таблиця 4.

Таблиця 4.

Номери навантажень	3	6
Значення навантажень	-6	-17

В табл. 5 приведені вектори відносних модулів пружності  $\bar{E}$  та відносних площ перерізів стержнів  $\bar{F}$ .

Таблиця 5.

Стержні	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{E}$	1	0,6	1	0,5	0,4	1	0,8
$\bar{F}$	1	2	4	1	2,5	0,7	3

Нижче приведено результати розрахунку на ПК.

### Результати розв’язку

Опорні реакції

-6,0000      -9,3810      -7,6190

Зусилля в стержнях

-9,3810 11,0149 -10,3319 -8,6534 0,2271 -6,0000 4,1026

Переміщення вузлів

0,0000 -43,0126 -41,4228 -23,1746 -34,2857  
0,0000 -60,9762 -154,9364 0,0000 -137,8647

Подовження стержнів

-60,9762 70,0565 -18,4913 -127,7656 1,5897 -34,2857 11,1111

### Список використаних джерел:

1. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1972. – 488 с.
2. Строительная механика / Под редакцией А.В.Даркова – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
3. Стукотілов В.С. Розрахунки на ЕОМ статично невинзначних систем // Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського державного педагогічного університету, Серія фізико-математична. – Кам’янець-Подільський, 2000. – С.111-117.
4. Справочник по теории упругости / Под редакцией П.М.Варвака – К.: Будівельник, 1971. – 420 с.

Отримано: 18.03.2004