УДК 530.18+378.147

А. В. Касперський[1], І. Т. Богданов[2]

[1]Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
[2]Бердянський державний педагогічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

В роботі розглянуті питання інтеграції фізики та математики. Пропонуються алгоритми розв'язування деяких задач з розділів курсу загальної фізики «Механіка» та «Електрика і магнетизм», використовується інтегральне числення.

Ключові слова: інтеграція, алгоритм, інтегральне числення, електричний заряд, координатна площина, фізика, механіка.

Під час розв'язування фізичних задач, які характеризують механічні й електромагнітні явища в ряді випадків виникає необхідність скористатися інтегральним численням, зокрема використанням визначених інтегралів. В статті пропонуються задачі із зазначених розділів та алгоритми їх розв'язування.

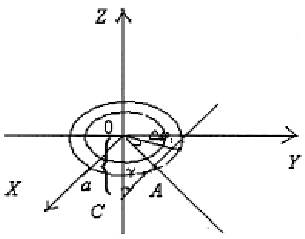

Рис. 1

Задача 1. Визначити силу взаємодії кільця масою M і радіусом R та матеріальної точки C масою m, що лежить на прямій, яка проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини. Відстань від точки C до центра кільця дорівнює a.

Розв'язання. Поділимо кільце на елементарні ділянки Δli, вважаючи кожну ділянку матеріальною точкою, яка має масу m_i.

$$m_i = \rho \Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R} R \sin\Delta\varphi_i = \frac{M}{2\pi R} R\Delta\varphi_i = \frac{M}{2\pi}\Delta\varphi_i,$$

де $\rho = \frac{M}{L} = \frac{M}{2\pi R}$ – лінійна питома густина, L – довжина кільця, $\Delta\varphi_1$ – кут, що відповідає ділянці дуги Δl_i.

Визначимо силу $\vec{F_i}$ взаємодії матеріальної точки C з малою ділянкою кільця Δli. Для цього подамо $\vec{F_i}$ у вигляді розкладу за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k},$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції $\vec{F_i}$ на осі координат. Очевидно, шукана сила $\vec{F}$ є рівнодіючою елементарних сил $\vec{F_i}$ і визначається так:

$$\vec{F} = \vec{i}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \vec{j}\sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \vec{k}\sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Внаслідок симетрії поставленої задачі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

Таким чином, величина шуканої сили взаємодії визначається як сума проекцій F_{iz} векторів $\vec{F_i}$ на вісь Oz. Знаходимо

$$F_{iz} = F_i \cos\gamma, \tag{1}$$

де γ – кут між віссю Oz і вектором $\vec{F_i}$, який є постійним для всіх i=1, 2, ..., n і визначається із прямокутного трикутника СОА:

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \tag{2}$$

Згідно із законом взаємодії двох точкових мас величину $\vec{F_i}$ запишемо як:

$$F_1 \approx k\frac{m \cdot m_i}{r^2} = \frac{kmM}{(R^2 + a^2)2\pi}\Delta\varphi_i. \tag{3}$$

Підставляючи (2) і (3) в (1), взявши суму по i, одержимо, що

$$\vec{F} \approx \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}\Delta\varphi_i. \tag{4}$$

Точним значенням величини сили взаємодії є границя, до якої прямує інтегральна сума, коли довжина найбільшої із частинних ділянок Δli, а також $\Delta\varphi_i$ прямують до нуля:

$$F = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\sum_{i=1}^{n} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}\Delta\varphi_i =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} d\varphi = \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)}^3}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)}^3} \cdot 2\pi = \frac{kmMa}{\sqrt{(R^2 + a^2)}^3}.$$

Відповідь: *чисельне значення сили* $F = \frac{kmMa}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}$.

Задача 2. Визначити роботу, яку необхідно виконати для запуску ракети масою m з поверхні Землі: а) на висоту H: б) на нескінченність.

Розв'язання. Величина сили $\vec{F}$, що обумовлює роботу при запуску ракети з поверхні Землі, дорівнює величині сили притягання ракети Землею, тобто

$$F(x) = G\frac{Mm}{x^2},$$

де M – маса Землі; m – маса ракети; G – гравітаційна стала; x – відстань від центра Землі до ракети. Сила $\vec{F}$ напрямлена від центра Землі у напрямку переміщення ракети із положення $a = R$ (R – радіус Землі) в положення $b = R + H$. Поділимо відрізок $[R, R + H]$ на частинні відрізки $[x_i, x_{i+1}]$ і обчислимо

Наближене значення роботи A_i на i-му відрізку. Оскільки довжину i-го відрізка $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ вважаємо досить малою, то величину сили, що спричиняє рух ракети, $\vec{F}_{(x_i)}$ на ньому вважаємо постійною таку, що дорівнює значенню цієї сили в точці x_i. Тоді

$$A_i \approx F(x_i)\Delta x_i = G\frac{Mm}{x_i^2}\Delta x_i.$$

Робота, що відповідає всьому інтервалу $[R, R + H]$, наближено визначається так:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{GMm}{x_i^2}\Delta x_i. \tag{1}$$

Переходимо до границі в рівності (1) при $\Delta x_i \to 0$ і одержимо точне значення роботи:

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0}\sum \frac{GMm}{x_i^2}\Delta x_i = GMm\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right).$$

Вважаючи, що біля поверхні Землі сила $\vec{F} = m\vec{g}$, а $x = R$, матимемо:

$$\vec{F} = m\vec{g} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow GMm = mgR^2.$$

Одержуємо вираз роботи

$$A = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{mgRH}{R+H}. \tag{2}$$

При віддаленні ракети на нескінченність, тобто при $H \to \infty$, із (2) одержимо:

$$\lim_{H\to\infty} A = \lim_{H\to\infty} mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = mgR.$$

Відповідь: а) $\frac{mgRH}{R+H}$; б) mgR.

Задача 3. Загострена поверхня свердла при роботі утворює однорідний параболоїд. Знайти момент інерції відносно осі симетрії такого однорідного тіла, що має густину ρ, утвореного параболоїдом обертання з радіусом основи R та висотою H.

Розв'язання. Параболоїд обертання є поверхнею, одержаною в результаті обертання параболічного сегмента навколо осі Oz (див. *рис. 2*).

Рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2pz$.

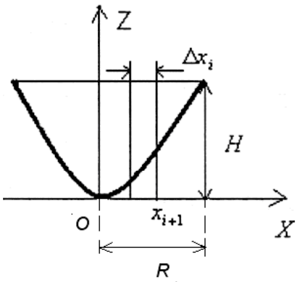

Рис. 2

Для визначення параметра p підставимо у рівняння параболи координати точки $A(R;\ H)$, що лежить на параболі. Тоді $R^2 = 2pH$, звідки $2p = \dfrac{R^2}{H}$, і рівняння параболи запишеться у вигляді $x^2 = \dfrac{R^2}{H} z$.

Рівняння поверхні обертання одержимо, замінивши x^2 через $x^2 + y^2$. Рівняння $z = \dfrac{H}{R^2}\left(x^2 + y^2\right)$ є рівнянням даного параболоїда обертання.

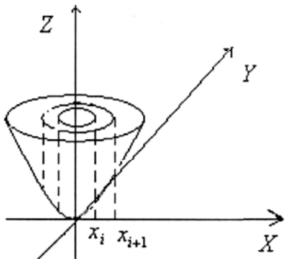

Рис. 3

При розв'язуванні задач на обчислення моменту інерції слід проводити розбиття на елементарні частинки таким чином, щоб всі точки i-ї ділянки знаходилися на приблизно однаковій відстані від осі обертання. Цього можна досягти, якщо параболоїд обертання розбити на систему кругових циліндричних кілець, осі яких збігаються з віссю обертання Oz (див. *рис. 3*). Тоді всі точки параболоїда, які лежать між циліндрами елементарних радіусів, будуть знаходитися на приблизно однаковій відстані від осі обертання в силу малих значень Δx_i.

Маса виділеного циліндричного кільця може бути визначена приблизно як маса, об'єму з такими параметрами:

1) товщина циліндричного кільця Δx_i;
2) довжина циліндричного кільця (довжина кола з радіусом x_i) $L = 2\pi x_1$;
3) висота циліндричного кільця h_i, яка може бути визначена за формулою:

$$h_i H = z(x_i, 0) = H - \frac{H}{R^2} x_i^2 = \frac{H}{R^2}\left(R^2 - x_i^2\right).$$

Об'єм цього прямокутного паралелепіпеда

$$V_i = 2\pi x_i \cdot \frac{H}{R^2}(R^2 - x_i^2) \cdot \Delta x_i .$$

Виділену ділянку можна розглядати як матеріальну точку, маса якої

$$m_i \approx \rho V_i = \rho \cdot 2\pi x_i \cdot \frac{H}{R^2}(R^2 - x_i^2)\Delta x_i = \frac{2\pi\rho H}{R^2} x_i (R^2 - x_i^2)\Delta x_i.$$

Тоді момент інерції I_i ділянки наближено дорівнює

$$I_i \approx m_i x_i^2 = \frac{2\pi\rho H}{R^2} x_i^3 (R^2 - x_i^2)\Delta x_i .$$

Точне значення моменту інерції одержимо, коли візьмемо суму всіх I_i; для $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$ і перейдемо до границі в цій інтегральній сумі при $\max \Delta x_i \to 0$:

$$I = \int_0^R \frac{2\pi\rho H}{R^2}(x^3 R^2 - x^5)dx = \frac{2\pi\rho H}{R^2}\left(R^2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{2\pi\rho H}{R^2} \cdot \frac{R^6}{12} = \frac{\pi\rho H R^4}{6}.$$

Відповідь: $I = \dfrac{\pi\rho H R^4}{6}$.

Задача 4. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля по прямій L, заданого рівнянням між точками A (1; 1; 1) та B (2; 3; 4)

$$\vec{E} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y - 1)\vec{k}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2dt \\ dz = 3dt \end{cases}.$$

Врахуємо, що при цьому для параметра t *на відрізку* $[AB]$ маємо: $0 \le t \le 1$.

Скористаємось формулою:

$$\int_L \vec{E}\vec{ds} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt.$$

Одержимо:

$$\int_L \vec{E}\vec{ds} = \int_a^b xdx + ydy + (x + y - 1)dz =$$

$$= \int_0^1 [t + 1 + (2t + 1) \cdot 2 + (t + 1 + 2t + 1 - 1) \cdot 3]dt \times$$

$$\times \int_0^1 (14t + 6)dt = 14 \cdot \frac{t^2}{2} + 6z)\Bigg|_0^1 = 13.$$

Відповідь: $\int_L \vec{E}\vec{ds} = 13$.

Задача 5. Обчислити циркуляцію векторного поля на площині заданою рівнянням

$$\vec{E}(x, y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$$

по відрізку прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

Розв'язання. У випадку плоского векторного поля матимемо дві складові P та Q. $\vec{E}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Якщо лінія L задана в явному вигляді, $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то $dy = y'(x)dx$, запишемо визначений інтеграл:

$$\int_L \vec{E}\vec{ds} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.$$

Рівняння лінії L: $y = x$ ($0 \le x \le 1$), звідки $dy = dx$, а отже одержимо:

$$\int_L \vec{E}\vec{ds} = \int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 [2x \cdot x + x^2]dx = 3\int_0^1 x^2dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1.$$

Відповідь: 1. $\int_L \vec{E}\vec{ds} = 1$.

Задача 6. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж перерізу гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від точки $A(1;1;0)$ до точки $B(\sqrt{2};\ \sqrt{2};1)$.

Розв'язання. Скористаємось, в даному разі формулою:

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_l 2xydx + y^2dy - x^2dz .$$

Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \\ z = \sqrt{t-1} \end{cases}, \text{ при цьому } 1 \le t \le 2 .$$

Далі знаходимо $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$; $dy = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$; $dz = \dfrac{dt}{2\sqrt{t-1}}$ і підставляємо в інтеграл:

$$\int_l 2xydx + y^2dy - x^2dz = \int_1^2 [2\sqrt{t}\sqrt{t}\frac{1}{2\sqrt{t}} + t\frac{1}{2\sqrt{t}} - t\frac{1}{2\sqrt{t-1}}]dt =$$

$$= \int_1^2 (\sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{t}{2\sqrt{t-1}})dt = \frac{3}{2}\int_1^2 \sqrt{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t-1}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} =$$

$$= t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 - \sqrt{t-1}\Bigg|_1^2 = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3-1} = 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} = \frac{6\sqrt{2} - 7}{3}.$$

Відповідь: $A = \dfrac{6\sqrt{2} - 7}{3}$. (Розмірність роботи буде визначеною, якщо задані величини матимуть кількісні характеристики реальних фізичних задач).

Задача 7. Обчислити потік параметра φ векторного поля $\vec{E} = x\vec{i} + \vec{j} + xz^2\vec{k}$ через поверхню $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

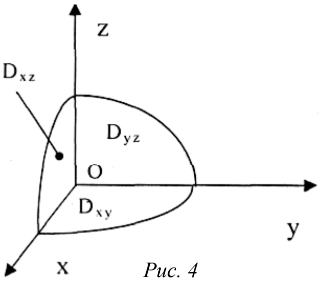

Рис. 4

Розв'язання. Поверхня σ являє собою частину сфери, розміщену в першому октанті. Позначимо проекції σ на координатні площино відповідно D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}, які є чвертями кругів радіуса 1.

Скористаємось формулою:

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint\limits_{D\,yz} P[x(y;z);y;z]dydz +$$
$$+ \iint\limits_{D\,xz} Q[x;y(x;z);z]dxdz + \iint\limits_{D\,xy} R[x;y].$$

Тоді

$$\iint\limits_{\sigma} \mathrm{\vec{E}} \cdot \vec{\nu}\delta\sigma = \iint\limits_{\sigma} \xi\delta\psi\delta\zeta + \delta\xi\delta\zeta + \xi\zeta^2\delta\xi\delta\psi = \iint\limits_{\Delta\psi\zeta} \sqrt{1 - \psi^2 - \zeta^2}\delta\psi\delta\zeta +$$
$$+ \iint\limits_{\Delta\xi\zeta} \delta\xi\delta\zeta + \iint\limits_{\Delta\xi\psi} \xi(1 - \xi^2 - \psi^2)\delta\xi\delta\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$\varphi_1 = \iint\limits_{D\,yz} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,dydz = \begin{vmatrix} y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ y^2 + z^2 = \rho^2 \\ dydz = \rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 \right) = \frac{\pi}{6},$$

$\varphi_2 = \iint\limits_{D\,xz} dxdy = \dfrac{1}{4}\pi$ (це є площина чверті круга),

$$\varphi_3 = \iint\limits_{D\,xy} x(1 - x^2 - y^2)dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho(1 - \rho^2)\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^1 (\rho^2 - \rho^4)d\rho \right] \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left((\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5) \right)\Bigg|_0^1 \right] \cos\varphi d\varphi = \frac{2}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{2}{15}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}.$$

Отже, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{25\pi + 8}{60}$.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{25\pi + 8}{60}$.

Задача 8. Позитивний електричний заряд q, розміщений на початку координат, створює векторне поле, так що в кожній точці простору вектор напруженості якого $\vec{E} = k\dfrac{q}{r^3} \cdot r$, де r – відстань точки від початку координат; $\vec{r}$ – одиничний вектор, направлений по радіусу – вектору даної точки, k = const. Обчислити потік векторної напруженості поля через сферу радіуса R з центром в початку координат.

Розв'язання. Зважаючи на те, що $r = R$ = const, маємо

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint\limits_{\sigma} k\frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{kq}{R^3}\iint\limits_{\sigma} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Але останній інтеграл дорівнює площі поверхні φ, оскільки $\vec{r} \cdot \vec{n} = |\vec{r}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0° = 1$.

Тоді $\dfrac{kq}{R^3}\iint\limits_{\sigma} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \dfrac{kq}{R^2}\sigma = \dfrac{kq}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi kq}{R}$.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{4\pi kq}{R}$.

Список використаних джерел:

1. Касперський А.В. Електрика та магнетизм : збірник задач, вправ і тестів. Практикум / А.В. Касперський, І.Т. Богданов. – К. : Четверта хвиля, 2006. – 248 с.
2. Сахаров Д.І. Збірник задач з фізики / Д.І. Сахаров, І.С. Космінов. – М. : Учпедгвид. – 1956. – 279 с.

А. В. Касперский[1], И. Т. Богданов[2]

[1]Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова
[2]Бердянський государственный педагогический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В работе рассмотренные вопросы интеграции физики и математики. Предлагаются алгоритмы развязывания некоторых задач из разделов «Механика» и «Электрика и магнетизм» курса общей физики используется интегральное исчисление.

Ключевые слова: интеграция, алгоритм, интегральное исчисление, электрический заряд, координатная плоскость, физика, механика.

A. V. Kasperskiy[1], I. T. Bogdanov[2]

[1]Natsionalnyy Pedagogical Drahomanov University
[2]Berdyansk State Pedagogical University

APPLICATION OF CERTAIN INTEGRALS IS AT THE DECISION OF PHYSICAL TASKS

In-process the considered questions of integration of Physics and Mathematics. The algorithms is used of uniting for some tasks from the sections on the topic of «Mechanic» and «Electrician and magnetism» in course «General Physics» are offered an integral calculation. When solving physical problems, which characterize the mechanical and electromagnetic phenomena in some cases, there is a need take advantage of integral calculus, including the use of certain integrals. In the article proposed the problem of these sections and algorithms for their solution.

Key words: integration, algorithm, integral calculation, electric charge, co-ordinate plane, physic, Mechanics.

Отримано: 6.06.2013