

Ірина КОВАЛЬСЬКА¹, Олена РАДЗІЄВСЬКА²Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Національний університет харчових технологійe-mail: ¹kovalska@kpnu.edu.ua, ²radzlina58@gmail.com;ORCID: ¹0000-0002-2653-0152, ²0000-0002-4249-0808**ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ КОНДЕНСАТОРІВ
ЗА ДОПОМОГОЮ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ**

Анотація. Теорія аналітичних функцій широко використовується не лише в фундаментальних дослідженнях. Вона є універсальним інструментом, який дозволяє формалізувати фізичні явища, полегшити аналіз складних систем, вирішувати непрості фізичні задачі, підвищуючи точність і ефективність результатів. З допомогою аналітичних функцій багато задач зводяться до простіших формул, які легко інтерпретуються. Також з'являється можливість отримувати аналітичні розв'язки без чисельних методів, а рівняння Коші – Рімана дозволяють одночасно описати декілька фізичних характеристик.

Зокрема, в електродинаміці та теорії поля аналітичні функції використовуються для опису потенціалів та полів, а здійснювані ними конформні відображення застосовуються для визначення розподілу електричного поля у складних геометричних областях, наприклад, навколо електрода у формі кута або поблизу гострих країв.

В даній статті аналітична функція, яка називається комплексним потенціалом, використовується для визначення характеристик електростатичного поля плоских та циліндричних конденсаторів. Зокрема, досліджуючи комплексний потенціал електростатичного поля плоского та циліндричного конденсаторів, отримано для них сім'ї екіпотенціалей та ліній потоку, визначено напрям вектора напруженості E електростатичного поля та обчислено ємність C для цих типів конденсаторів. Вказано, що вектор напруженості E електростатичного поля плоского конденсатора сталлий і направлений по нормалі до поверхні пластин конденсатора, а у випадку циліндричного конденсатора вектори E та D (вектор електростатичної індукції) направлені радіально від внутрішнього циліндра ($r = a$) до зовнішнього ($r = b$), якщо внутрішній має позитивний заряд).

Ключові слова: аналітичні функції, комплексний потенціал, плоский конденсатор, циліндричний конденсатор, екіпотенціали, лінії потоку, електростатичне поле, вектор напруженості, ємність конденсатора.

Вступ. Теорія аналітичних функцій знаходить широке застосування не лише в фундаментальних дослідженнях. Вона є універсальним інструментом, який дозволяє формалізувати фізичні явища, полегшити аналіз складних систем, вирішувати непрості фізичні задачі, підвищуючи точність і ефективність результатів. З допомогою аналітичних функцій багато задач зводяться до наочних формул, які легко інтерпретуються, з'являються можливості отримувати аналітичні розв'язки без чисельних методів, а рівняння Коші – Рімана дозволяють одночасно описати декілька фізичних характеристик.

Зокрема, в електродинаміці та теорії поля аналітичні функції використовуються для опису потенціалів та полів, а здійснювані ними конформні відображення застосовуються для визначення розподілу електричного поля у складних геометричних областях, наприклад, навколо електрода у формі кута або поблизу гострих країв.

Постановка задачі. В даній статті ставиться задача з допомогою аналітичної функції, яка називається комплексним потенціалом, дослідити характеристики електростатичного поля плоских та циліндричних конденсаторів. Зокрема, досліджуючи комплексний потенціал електростатичного поля плоского та циліндричного конденсаторів, отримати для них сім'ї екіпотенціалей та ліній потоку, визначити напрям вектора напруженості E електростатичного поля та обчислити ємність C для цих типів конденсаторів.

Для визначення характеристик електростатичного поля конденсатора будемо використовувати аналітичну функцію

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1)$$

яка називається комплексним потенціалом. Комплексні потенціали – це зручний математичний інструмент, що

широко застосовується в аналізі електричних, магнітних і гідродинамічних полів. У задачах електростатики та магнетизму потенціал є скалярною функцією, яка описує поле і для двовимірних полів має вигляд (1).

Дійсна частина $u(x, y)$ і уявна частина $v(x, y)$ називаються відповідно потенціальною функцією і функцією потоку.

Лінії $u(x, y) = const$ називаються екіпотенціальними лініями або лініями рівня. Екіпотенціальні лінії – це уявні лінії в електричному полі, на кожній з яких потенціал однаковий в будь-якій точці. Тому переміщення заряджених частинок вздовж такої лінії не вимагає роботи, оскільки різниця потенціалів між будь-якими двома точками на екіпотенціальній лінії рівна нулю. Лінії рівня завжди перпендикулярні до ліній напруженості електричного поля. Екіпотенціальні лінії не можуть перетинатися, адже в кожній точці поля може бути лише один потенціал. Чим ближче розташовані лінії рівня, тим сильніше поле в даній області.

Лінії $v(x, y) = const$ називаються лініями потоку або лініями напруженості електричного поля. Це теж уявні лінії, вздовж яких у просторі напрямлене електричне поле. Вектор напруженості поля в кожній точці спрямований по дотичній до лінії потоку. Лінії напруженості електричного поля завжди починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних. Їх напрямок вказує на напрям сили, що діє на позитивний заряд у полі. Лінії потоку не перетинаються, оскільки в кожній точці поля може бути лише один напрямок напруженості поля. Щільність ліній потоку відображає величину напруженості: чим більше ліній в певному об'ємі, тим сильніше поле. Рух уздовж ліній потоку відповідає зміні потенціалу і роботі поля над зарядом.

Розглянемо плоский конденсатор, який складається з двох паралельних пластин, розділених шаром діелектрика (рис. 1). На пластинках зосереджений заряд і між ними виникає електричне поле. Приймаємо, що відстань між пластинами d повинна бути значно меншою за розміри пластин. При цьому на кінцях пластин спостерігається крайовий ефект: значно збільшується напруженість поля в порівнянні з напруженістю у цих місцях у випадку нескінченних пластин.

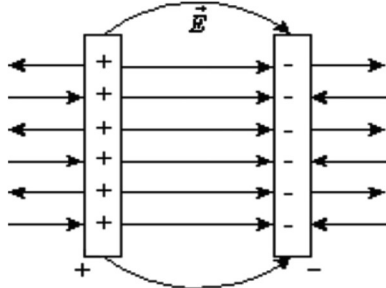


Рис. 1

Будемо розглядати заряджений конденсатор із потенціалами на пластинках φ_1 і φ_2 . Для плоско-паралельного електростатичного поля комплексний потенціал є його енергетичною характеристикою і визначений з точністю до довільної сталої. В безрозмірних величинах шукаємо цей потенціал у вигляді $w = -\alpha iz$, де стала α визначається граничними умовами: $\varphi_1 = \alpha x_1$, $\varphi_2 = \alpha x_2$. Звідси слідує, що $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha(x_2 - x_1) = \alpha d$, тобто $\alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{\varphi_0}{d}$, де φ_0 – різниця потенціалів між пластинами. Тепер комплексний потенціал електростатичного поля матиме вигляд $w = -\frac{i\varphi_0 z}{d}$. Побудуємо картину ліній поля, що описується цим комплексним потенціалом. Оскільки $z = x + iy$, а функція $w = u + iv$, то отримаємо рівняння:

$$u + iv = -\frac{i\varphi_0}{d}(x + iy) = \frac{\varphi_0 y}{d} - \frac{i\varphi_0 x}{d}.$$

Звідси, прирівнюючи функції u та v по черзі до різних сталих значень, отримуємо сім'ю екіпотенціальних та сім'ю ліній потоку:

$$u = \frac{\varphi_0}{d} y = Const, \quad v = \frac{\varphi_0 x}{d} = Const;$$

Екіпотенціальні лінії зображують одновимірні області, в яких електричний потенціал, створений одним або декількома сусідніми зарядами, має постійну величину. Екіпотенціальні лінії можуть бути прямими, вигнутими або неправильної форми, залежно від орієнтації зарядів, що породжують їх. Якщо заряди розподілені по двом пластинкам в статичній рівновазі, то екіпотенціальні лінії будуть приблизно прямими. Це ми і бачимо з отриманих рівнянь і на рис. 1. Таке поле називається однорідним. Його напруженість $E = \frac{dw}{dz} = -\frac{i\varphi_0}{d}$, а вектор напруженості E електростатичного поля сталий і направлений по нормалі до поверхні пластин конденсатора.

Слід відмітити, що поблизу країв пластин лінії електричного поля відхиляються від ідеально-паралельного розташування. Це відхилення пов'язане з тим, що біля країв пластин електричне поле вже не

є однорідним, як у центральній частині конденсатора. Таке явище називається крайовим ефектом.

Визначимо ємність C плоского конденсатора, тобто його здатність накопичувати електричний заряд q при певній різниці потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$ між його пластинами:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

З загального курсу фізики відомо, що $q = \frac{\epsilon s \varphi_0}{d}$,

де ϵ – діелектрична проникність матеріалу між пластинами, s – площа однієї пластини конденсатора, $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$. Якщо $\epsilon = 1$, то

$$C = \frac{s}{d}.$$

Отже, збільшення площі пластин s або зменшення відстані між ними d збільшує ємність конденсатора. Також ємність зростає із збільшенням діелектричної проникності матеріалу між пластинами.

Розглянемо далі циліндричний конденсатор – це тип електричного конденсатора, який складається з двох співвісних циліндричних провідників різних радіусів r , розмішених паралельно один одному. Нехай на межі внутрішнього провідника ($r = a$) заданий потенціал φ_1 (рис. 2), а на межі зовнішнього провідника ($r = b$) – потенціал φ_2 . Причому $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

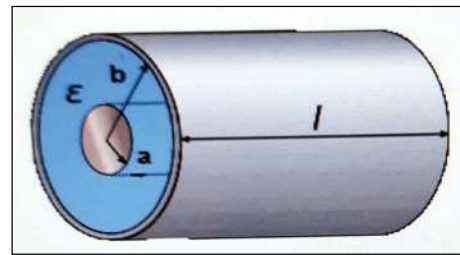


Рис. 2

Довжина даного конденсатора l має бути більшою в порівнянні з діаметром. Конструкція такого конденсатора дозволяє створити концентроване електричне поле в просторі між циліндрами.

Будемо розглядати заряджений конденсатор із потенціалами на провідниках φ_1 і φ_2 . В безрозмірних величинах шукаємо комплексний потенціал поля циліндричного конденсатора у вигляді $w = \frac{\alpha}{2\pi} \ln z = u + iv$.

Цей потенціал зазвичай залежить від логарифма координати z через властивості поля у циліндричних координатах. Виділимо дійсну та уявну частини аналітичної функції w . Оскільки

$$\ln z = \ln |z| + i\theta = \ln \rho + i\theta, \quad \text{то} \quad w = \frac{\alpha}{2\pi} (\ln \rho + i\theta) = u + iv.$$

Звідси отримуємо, що потенціал u і функція потоку v визначаються співвідношеннями:

$$u = \frac{\alpha \cdot \ln \rho}{2\pi}, \quad v = \frac{\alpha \theta}{2\pi},$$

де ρ і θ – відповідно модуль та аргумент комплексного числа z або полярні координати точки z , а a – стала, яка визначається граничними умовами:

$$\varphi_1 = \alpha \ln a / (2\pi), \quad \varphi_2 = \alpha \ln b / (2\pi).$$

Звідси слідує, що

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha (\ln b / (2\pi) - \ln a / (2\pi)),$$

тобто

$$\alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \cdot 2\pi. \quad (2)$$

Тепер комплексний потенціал електростатичного поля матиме вигляд

$$w = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln z.$$

Лінійний заряд, що породжує це поле, розміщений вздовж осі, перпендикулярної комплексній площині Z і є моделлю розглядуваного циліндричного конденсатора. Для слабких полів вектор електростатичної індукції D та вектор напруженості електричного поля E зв'язані співвідношенням $D = \epsilon E$, де коефіцієнт пропорційності ϵ називають діелектричною сталою середовища. Нехай $\epsilon = 1$. Тоді для безрозмірних векторів D та E справедливо

$$D = E = X + iY = \frac{dw}{dz} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{z}.$$

Виділимо дійсну та уявну частини цієї функції. Оскільки

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \text{ то } X = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{x}{x^2 + y^2}, \text{ а}$$

$$Y = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Знайдемо напрям вектора напруженості електростатичного поля циліндричного конденсатора.

Якщо функція потоку $v(\rho; \theta) = \frac{\alpha\theta}{2\pi} = const$, то вибравши сталий напрям $\theta_0 = const$, знайдемо його образ у виразі для E . Перепишемо X і Y , враховуючи, що $x = \rho \cos \theta$, а $y = \rho \sin \theta$. Тоді

$$X = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\cos \theta_0}{\rho}, \quad Y = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ln \frac{b}{a}} \frac{-\sin \theta_0}{\rho}. \quad (3)$$

Або $Y = -tg\theta_0 \cdot X$. Тобто вектор напруженості електростатичного поля E циліндричного конденсатора, а отже і вектор електростатичної індукції D напрямлені вздовж тих же променів $\theta = const$. Знак мінус вказує, що електричне поле спрямоване в напрямку зменшення потенціалу від позитивного заряду до негативного і забезпечує правильну спрямованість цього поля. У випадку циліндричного конденсатора вектори E та D напрямлені радіально від внутрішнього циліндра ($r = a$) до зовнішнього ($r = b$, якщо внутрішній має позитивний заряд).

Використовуючи формули (3), знайдемо довжини векторів E та D .

$$|E| = |D| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{\rho \ln \frac{b}{a}}. \quad (4)$$

Звідси можна визначити, яким повинен бути радіус внутрішнього циліндра a , щоб значення максимальної напруженості поля E при фіксованому радіусі зовнішнього циліндра b , було найменше. В такому випадку знаменник дробу в формулі (3) при $\rho = a$

має бути найбільший. Знайдемо максимум функції

$$f(a) = a \ln \frac{b}{a}. \text{ Для цього}$$

$$f'(a) = \ln \frac{b}{a} + a \cdot \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a^2} \right) = \ln \frac{b}{a} - 1 = 0,$$

тобто $a = \frac{b}{e}$, де e – основа натурального логарифма.

Оскільки

$$f''(a) = \left(\ln \frac{b}{a} - 1 \right)' = -\frac{1}{a} < 0,$$

то функція $f(a)$ в цій точці дійсно досягає максимуму, а отже при радіусі внутрішнього циліндра $a = \frac{b}{e}$ значення максимальної напруженості поля E при фіксованому радіусі зовнішнього циліндра b , буде найменше.

Визначимо ємність C циліндричного конденсатора, а саме його здатність накопичувати електричний заряд q при певній різниці потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$ між його

циліндрами: $C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1}$. З формули (2) слідує, що

$$C = \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Отже, чим менше відрізняються радіуси внутрішнього і зовнішнього циліндрів, чим ємність конденсатора буде більша.

Висновок. В даній статті ставиться задача з допомогою аналітичної функції, яка називається комплексним потенціалом, дослідити характеристики електростатичного поля плоских та циліндричних конденсаторів. Зокрема, досліджуючи комплексний потенціал електростатичного поля плоского та циліндричного конденсаторів, отримано для них сім'ї еквіпотенціалей та ліній потоку, визначено напрям вектора напруженості E електростатичного поля та обчислено ємність C для цих типів конденсаторів. Вказано, що вектор напруженості E електростатичного поля плоского конденсатора сталий і направлений по нормалі до поверхні пластин конденсатора, а у випадку циліндричного конденсатора вектори E та D (вектор електростатичної індукції) напрямлені радіально від внутрішнього циліндра до зовнішнього (якщо внутрішній має позитивний заряд).

Список використаних джерел:

1. Бак С.М. Лекції з комплексного аналізу. Вінниця: ФОП Горбачук І.П., 2011. 185 с.
2. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолоб Ю.Ф., Курило І.А., Шеховцов В.І. та ін. Теоретичні основи електротехніки. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. Т. 3. 241 с.
3. Гаркуша І.П., Курінний В.П. Фізика: навчальний посібник: у 7 частинах. Ч. 3. Електрика і магнетизм. [Електронне видання]: Дніпро: Національний гірничий університет, 2018. 165 с.
4. Ковальська І.Б. Побудова ліній поля плоского конденсатора з допомогою цілої лінійної функції. *Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка*: збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспі-

рантів [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип. 23. С. 724-725.

5. Мельник Т.А. Комплексний аналіз: підручник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. 192 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учебное пособие для втузов. 13-е изд. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. Т. 2. 560 с.
7. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Київ: ВШ, 1981. Ч. II. 456 с.

Iryna KOVALSKA¹, Olena RADZIYEVSKA²

¹Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University

²National University of Food Technology

DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF THE ELECTROSTATIC FIELD OF CAPACITORS USING AN ANALYTICAL FUNCTION

Abstract. The theory of analytical functions is widely used not only in fundamental research. It is a universal tool that allows you to formalize physical phenomena, facilitate the analysis of complex systems, solve complex physical problems, increasing the accuracy and efficiency of the results. With the help of analytical functions, many problems are reduced to simpler formulas that are easily interpreted. It also becomes possible to obtain analytical solutions without numerical methods, and the Cauchy-Riemann equations allow you to simultaneously describe several physical characteristics.

In particular, in electrodynamics and field theory, analytical functions are used to describe potentials and fields, and the conformal mappings they perform are used to determine the distribution of the electric field in complex geometric regions, for example, around an electrode in the form of a corner or near sharp edges.

In this article, an analytical function called the complex potential is used to determine the characteristics of the electrostatic field of flat and cylindrical capacitors. In particular, by studying the complex potential of the electrostatic field of flat and cylindrical capacitors, families of equipotentials and flux lines were obtained for them,

the direction of the electrostatic field strength vector E was determined, and the capacitance C was calculated for these types of capacitors. It is indicated that the electrostatic field strength vector E of a flat capacitor is constant and directed normal to the surface of the capacitor plates, and in the case of a cylindrical capacitor, the vectors E and D (electrostatic induction vector) are directed radially from the inner cylinder ($r = a$) to the outer ($r = b$), if the inner one has a positive charge).

Key words: analytical functions, complex potential, flat capacitor, cylindrical capacitor, equipotentials, flux lines, electrostatic field, strength vector, capacitor capacitance.

References:

1. Bak S.M. Lektsiyi z kompleksnoho analizu. Vinnytsya: FOP Horbachuk I.P., 2011. 185 s.
2. Boyko V.S., Boyko V.V., Vydolob Yu.F., Kurylo I.A., Shekhovtsov V.I. ta in. Teoretychni osnovy elektrotekhniki. Kyiv: NTUU «KPI», 2013. Т. 3. 241 s.
3. Harkusha I.P., Kurinnyy V.P. Fyzyka: navchal'nyy posibnyk: u 7 chastynakh. Ch. 3. Elektryka i mahnyetizm. [Elektronne vydannya]: Dnipro: Natsional'nyy hirnychyy universytet, 2018. 165 s.
4. Koval'ska I.B. Pobudova liniy polya ploskoho kondensatora z dopomohoyu tsiloyi liniynoyi funktsiyi. *Naukovi pratsi Kam'yanets'-Podil's'koho natsional'noho universytetu imeni Ivana Ohiyenka*: zbirnyk za pidsumkamy zvitnoyi naukovoyi konferentsiyi vykladachiv, doktorantiv i aspirantiv [Elektronnyy resurs]. Kam'yanets'-Podil's'kyy: Kam'yanets'-Podil's'kyy natsional'nyy universytet imeni Ivana Ohiyenka, 2024. Vyp. 23. С. 724-725.
5. Mel'nyk T.A. Kompleksnyy analiz: pidruchnyk. Kyiv: VPTs «Kyivskyy universytet», 2015. 192 s.
6. Pyskunov N.S. Dyfferentsoal'noe y yntehral'noe yschy-slenyya dlya vtuzov: uchebnoe posobyе dlya vtuzov. 13-e yzd. Moskva: Nauka, Hlavnaya redaktsyya fizyko-matematycheskoy lyteratury, 1985. Т. 2. 560 s.
7. Shkil' M.I. Matematychnyy analiz. Kyiv: VSh, 1981. Ч. II. 456 s.

Отримано: 14.10.2024