

## ВИКОРИСТАННЯ РІВНЕВИХ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ 10 КЛАСУ

У статті подано зразки рівневих фізичних задач, які автори пропонують використовувати на уроках алгебри і початків аналізу 10 класу при вивченні тригонометричних функцій з метою активізації пізнавальної діяльності учнів.

**Ключові слова:** рівні навчальної діяльності учнів, рівневі фізичні задачі, тригонометричні функції, тригонометричні рівняння і нерівності.

Новий зміст фізико-математичної освіти в середніх загальноосвітніх навчальних закладах наблизив розглядані навчальні дисципліни до рівня сучасного наукового знання. Глибокі зв'язки, які існують між математикою і фізикою як науками, мають знайти адекватне відображення у зв'язках між відповідними дисциплінами. Розглядаючи математику і фізику як навчальні предмети, потрібно враховувати, що кожна наукова теорія, ідея, поняття, відображаючи у взаємозв'язках одну із сторін матеріальної дійсності, надає той основний матеріал, який представляє зміст відповідних навчальних предметів.

Свідомого засвоєння знань учнями можна досягти лише при здійсненні міжпредметних зв'язків, коли учні використовують набуті знання для виконання різного роду практичних задач, що дає можливість підготувати повноцінного громадянина нашої країни, здатного до цілісного пізнання законів природи.

Здійснення міжпредметних зв'язків передбачає такий взаємозв'язок всього навчально-виховного процесу, коли різні навчальні дисципліни з різних сторін вивчають окремі сторони явищ природи. При цьому зв'язок між явищами, що вивчаються, не порушує внутрішню логіку кожної з дисциплін. Встановлюючи ці природні органічні зв'язки, вчитель сприяє формуванню в учнів узагальнених знань про важливі явища об'єктивного світу, вироблення єдиного цілісного наукового світогляду.

На жаль, в даний час міжпредметні зв'язки математики і фізики не знайшли ще потрібного втілення в практику роботи вчителів цих предметів, що веде до неповного, одностороннього вивчення питань, де проявляється закономірний зв'язок математики і фізики як наук про природу.

Спроби використати фізичні задачі на уроках алгебри і початків аналізу зроблені в роботах [2], [3]. Однак, враховуючи те, що середні загальноосвітні навчальні заклади перейшли на рівневе навчання, виникає необхідність розробити рівневі фізичні задачі, які були б доцільними на уроках математики.

Ми пропонуємо розв'язувати питання політехнічного навчання і міжпредметних зв'язків алгебри і початків аналізу та фізики за допомогою спеціально підібраної рівневої системи фізичних задач, які мають зіграти велику роль у розвитку в учнів навичок застосування на практиці теоретичних знань, одержаних при вивченні похідної та її застосування. В таких задачах можна розглядати різноманітні застосування похідної у виробництві, науці, техніці, промисловості, народному господарстві.

Розв'язування фізичних задач у процесі вивчення алгебри і початків аналізу є складовим елементом у навчанні алгебри і початків аналізу, причому задачі ми підбираємо, користуючись чотирма рівнями навчальних досягнень учнів: початковим, середнім, достатнім, високим, які розроблені Міністерством освіти і науки України [1].

Зауважимо, що серед наведених задач важливу роль відіграють також експериментальні задачі, які дають можливість відтворювати в навчальному процесі процедуру перевірки наукової гіпотези і показати шлях наукового становлення теорії.

Наведемо для прикладу деякі з системи фізичних задач, яку ми розробили для учнів 10 класу, що вивчають тригонометричні функції за підручником [4]. Ці задачі можуть бути використані як додаткові задачі, що замінюють чисто алгебраїчні задачі з підручника.

### Тригонометричні функції числового аргументу

#### Початковий і середній рівні

1. Сила струму, який проходить в обмотках котушки, змінюється за косинусоїдальним законом і описується функцією  $y = \cos^2 x + a$ . Знайдіть множину значень сили струму.
2. Графік зміни сили струму, що проходить в обмотках котушки, описується функцією  $y = \sin x + 1$ . Знайдіть множину значень сили струму.
3. Перший пішохід рухається по траєкторії, що описується функцією  $y = \operatorname{ctg} x$ , а другий – по прямій  $x = \frac{\pi}{2}$ . Чи зустрінуться ці пішоходи? Якщо так, то в якій точці?
4. Маршрут туристів має вигляд косинусоїди. Якою функцією треба описати цей маршрут, щоб він пройшов через точку  $(\pi; -2)$ ?
5. Траєкторія руху автомобіліста описується функцією  $y = \operatorname{tg} x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ , а траєкторія руху велосипедиста – рівнянням  $y = 5$ . Чи перетинаються ці траєкторії? Якщо так, то скільки разів?
6. Використовуючи свою методику обчислення температури повітря, метеоролог зробив деякі записи. Відомо, що температура знижувалась, але записи розміщені в хаотичному порядку. Відновіть послідовність запису виразів:  $\operatorname{ctg} 13^\circ; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}; \operatorname{ctg} 45^\circ; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}; \operatorname{ctg} 4^\circ; \operatorname{ctg} 80^\circ$ .

#### Достатній рівень

1. На змаганнях з фрістайлу траєкторія руху спортсмена описується функцією  $y = \cos x$ , а траєкторія руху знімальної камери – рівнянням  $x = \frac{\pi}{4}$ . Чи перетне оператор лижню спортсмена? Якщо так, то скільки разів?
2. Шестірня рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega = \frac{\pi}{3}$ . Знайдіть період обертання шестірні.
3. Тіло обертається навколо своєї осі за законом  $\varphi = 5 + 18t - 3t^2$  ( $\varphi$  у радіанах,  $t$  у секундах). Через який час припиниться обертання?

#### Високий рівень

1. Басейн наповнювали водою протягом деякого часу. Спостерігач, застосовуючи індивідуальну методику вимірювань наповненості басейна, записав такі вирази:  $\sin \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{2}; \sin 48^\circ; \sin 3^\circ; \sin 15^\circ$ . Проте вони розміщені в хаотичному порядку. Відновіть порядок запису виразів.
2. Відомо, що графіки функцій  $y = \sin x$  і  $y = \arcsin x$  подібні (схожі) до хвиль на морі. Чи буде графік функції  $y = \arcsin(\sin x)$  такою самою «хвилею»?
3. Обчисліть заряд кульки  $q$ , яка має масу  $m = 2,0$  г і обертається навколо нерухомого точкового заряду на нитці завдовжки  $l = 1,2$  м, якщо період її обертання  $T = 3,2$  с, а кут відхилення від вертикалі  $\alpha = 25^\circ$ .

**Властивості тригонометричних функцій. Гармонічні коливання**

*Початковий і середній рівні*

- Рівняння гармонічного коливання  $x = 4 \sin 30\pi t$ , де час виражено у секундах. Знайдіть зміщення і фазу коливання через 0,01 с, починаючи від початку періоду.
- Рівняння гармонічного коливання  $x = 6,5 \sin 45\pi t$ , де час виражено у секундах. Знайдіть зміщення і фазу коливання через 0,04 с, починаючи від початку періоду.
- Рибалка помітив, що гребені хвиль проходять через корму його човна, який стоїть на якорі, через 6 с. Він виміряв відстань між двома сусідніми гребенями і знайшов, що вона дорівнює 20 м. Яка швидкість хвиль?
- Запишіть рівняння гармонічного коливання, амплітуда якого дорівнює 10 см, період – 10 с, початкова фаза – нулю. Знайдіть зміщення, швидкість і прискорення тіла, яке коливається, через 12 с після початку коливань.
- Під час обертання дрютяної рамки в магнітному полі потік магнітної індукції, який пронизує її, змінюється залежно від часу за законом  $\Phi = 0,01 \sin 10\pi t$ . Знайдіть амплітуду, період і частоту.
- Тіло здійснює гармонічні коливання за законом  $x = 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)t$  см. Знайдіть амплітуду сили і повну енергію тіла, якщо його маса дорівнює 2 кг.

*Достатній рівень*

- Кульку підвішено на довгій нитці. Одного разу її піднімають по вертикалі до точки підвісу, іншого – відхиляють як маятник на незначний кут. В якому з цих випадків кулька швидше повернеться до положення рівноваги?
- Якщо годинник із секундним маятником перевезти із Санкт-Петербурга в Архангельськ, то він почне відставати чи спішити? Що треба зробити, щоб годинник йшов правильно? Прискорення сили тяжіння для Санкт-Петербурга  $g_{C-П} = 9,819 \text{ м/с}^2$ , для Архангельська  $g_A = 9,822 \text{ м/с}^2$ .
- Запишіть рівняння гармонічного коливання, якщо його амплітуда 5 см, період 4 с, початкова фаза  $\pi/4$  рад. Побудуйте графік залежності швидкості від часу.

*Високий рівень*

- Період коливань годинникового маятника на Землі дорівнює 2 с. Визначте період коливань цього маятника на поверхні Місяця, якщо маса Землі в 81 раз більша за масу Місяця, а радіус Місяця становить 3/11 радіуса Землі.
- Два однаково напрямлених коливання з однаковими частотами мають амплітуди 20 см і 50 см. Друге коливання випереджає перше за фазою на  $\pi/6$ . Визначте амплітуду і початкову фазу сумарного коливання, якщо початкова фаза першого коливання дорівнює нулю.
- Вздовж деякої прямої поширюються коливання з періодом 0,25 с і швидкістю 48 м/с. Через 10 с після утворення коливання у початковій точці на відстані 43 м від неї, зміщення точки дорівнює 3 см. Визначте у цей самий момент часу зміщення і фазу коливання в точці, яка лежить на відстані 45 м від джерела коливання.

**Обернені тригонометричні функції**

*Початковий і середній рівні*

- Спостерігач перебуває на відстані 50 м від вежі, висота якої 51,7 м. Під яким кутом він бачить вершину вежі, якщо його очі розміщені на висоті 1,7 м?
- З даху будинку заввишки 15 м протягнуто кабель завдовжки 30 м і закріплено до крока, забитого в землю. Під яким кутом до поверхні землі натягнуто кабель?
- Астроном спостерігає зорі з двох телескопів. Перший нахилено під кутом  $\alpha = \arctg 1$ , а другий – під кутом  $\beta = 2,1 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$  до поверхні стола. Який з кутів більший?

- Учні спостерігають Місяць з двох телескопів. Перший телескоп нахилено під кутом  $\alpha = \beta - \arcsin \frac{1}{2}$  до поверхні стола, а другий – під кутом  $\beta = \arccotg \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Який з кутів більший?
- Під яким кутом  $\gamma$  стоїть підпора до ферми моста, якщо відомо, що  $\frac{300\gamma}{5 \arcsin 1} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$ ?
- Електричний стовп підпертий підпорою. Під яким кутом  $\alpha$  поставлена підпора, якщо відомо, що  $\frac{5\alpha - \arccos 1}{1,5} = \arcsin 1$ ?

*Достатній рівень*

- Знайдіть кут  $\alpha$ , під яким вилетів снаряд до горизонту, якщо відома початкова швидкість снаряду  $v_0 = 500 \text{ м/с}$  і час польоту  $t = 10 \text{ с}$ .
- Знайдіть кут  $\alpha$ , під яким вилетів снаряд до горизонту, якщо відома початкова швидкість снаряду  $v_0 = 500 \text{ м/с}$  і дальність польоту  $l = 6000 \text{ м}$ .
- Під час переміщення вантажу на відстань  $s = 100 \text{ м}$  сила  $F = \left(\cos \frac{7}{8\pi}\right)^{-1}$  (Н) виконує роботу  $A = 100 \text{ Дж}$ . Знайдіть кут між векторами сили і переміщення.

*Високий рівень*

- Дано вектори сили і переміщення. Знайдіть  $\cos \alpha$  кута між ними, якщо відомо, що  $\alpha = \arctg \sqrt{3}$ .
- Опора моста нахилена під кутом  $\alpha$  до поверхні землі, друга опора нахилена до першої під кутом  $\beta$ . Чи буде друга опора перпендикулярною до землі, якщо  $\alpha = \arccos x$ ,  $\beta = \arcsin x$ ?
- Один бік даху нахилений під кутом  $\alpha$ , інший – під кутом  $\beta$ . Чи однаково вони нахилені, якщо  $\alpha = \arctg x$ , а  $\beta = \arccotg \frac{1}{x} - \pi$ ?

**Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь**

*Початковий і середній рівні*

- Хлопчик, тягнучи під гору санки, виконав роботу 340 Дж. При цьому, пройшовши шлях  $s = 20 \text{ м}$ , він діяв на санки силою  $F = 34 \text{ Н}$ . Знайдіть кут нахилу гори.
- Траєкторію руху пароплава описує функція  $y = 3 \cos x + 1$ . В якій точці  $x$  функція  $y$  дорівнюватиме нулю?
- Літак піднявся в небо під деяким кутом. Якби цей кут збільшили в 2/3 раза, а потім зменшили на  $\pi/6$ , то косинус одержаного кута дорівнював би 1/2. Знайдіть кут, під яким літак піднявся в небо.
- Пішохід пройшов певний шлях лісом. Якщо цей шлях зобразити графічно, то дістанемо графік функції  $y = \sin\left(\frac{4x}{7} + \frac{\pi}{2}\right)$ . Дорогу, яка проходить через ліс, можна також зобразити графіком функції  $y = -1$ . Знайдіть точки, в яких пішохід переходить дорогу.
- Промінь сонця падає на землю під деяким кутом  $x$ . Якщо цей кут зменшити на  $45^\circ$ , то синус одержаного кута дорівнюватиме нулю. Знайдіть кут падіння променя сонця.
- З гармати вистрілили під деяким кутом до горизонту. Якщо цей кут збільшити в 4 рази, 1/3 тангенса одержаного кута, зменшеного на  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , дорівнюватиме нулю. Знайдіть кут, під яким вилетів снаряд з гармати.

*Достатній рівень*

- Краплі дощу падають на поверхню озера під деяким кутом. Якщо цей кут збільшити на  $\pi/6$ , а потім зменши-

ти у 8 разів, то 4 косинуси одержаного кута дорівнюватимуть  $2\sqrt{3}$ . Знайдіть кут, під яким краплі дощу падають на поверхню озера.

2. Синус кута, під яким промінь світла падає на поверхню озера, дорівнює косинусу кута, під яким краплі дощу падають на поверхню озера. Знайдіть цей кут.
3. Під час пориву вітру листок і пиріна впали на землю під одним і тим самим кутом. Знайдіть цей кут, якщо відомо, що синус подвійного кута падіння листка дорівнює косинусу кута падіння пиріни.

*Високий рівень*

1. Два лісники, здійснюючи вечірній рейд лісом, йшли різними шляхами. Траєкторію руху кожного з них можна описати рівняннями  $y = \cos x$  і  $y = 1 + \cos 2x$ . Чи перетнуться шляхи лісників?
2. Шлях руху першого туриста можна зобразити графіком функції  $y = \sqrt{2} \sin^2 x$ , а шлях руху другого туриста – функції  $y = -\cos x$ . В яких точках туристи зустрілися?
3. Є дві рівновеликі ділянки землі форми трикутників. Основи трикутників дорівнюють  $\sin 5x$  і  $\sin 8x$ , а їхні висоти – відповідно  $\cos 3x$  і  $\cos 6x$ . Знайдіть  $x$ .

**Розв'язування тригонометричних рівнянь**

*Початковий і середній рівні*

1. На «чортовому» колесі розміщено 15 кабін. Зафіксували кабін у крайньому лівому положенні. Знайдіть найменший кут, за якого висота до кабіни відносно осі обертання колеса дорівнює радіусу колеса.
2. Сили змінних струмів, які протікають у двох провідниках, визначаються відповідними функціями  $I_1 = 10 \sin t$  і  $I_2 = 20 \sin 50(t + 0,0314)$ . Визначте моменти часу  $t$ , в які сили струму в обох провідниках мають однакові значення.
3. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо градусна міра гострого кута описується рівнянням  $2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$ , а прилеглий катет дорівнює 3 см.
4. На який кут повернеться крильчатка електричного двигуна при короткому замиканні, якщо рух задано залежністю  $\sin \frac{t}{11} + 3 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3} = 0$ , де  $t$  – час у хвилинах;  $\alpha$  – кут повороту крильчатки?
5. Маса вуглецю, який міститься в конверторній печі і вступив у реакцію, обчислюється за формулою  $M - M_0 \operatorname{tg} \frac{\pi t}{8} = 0$ . Через який час залишиться лише половина маси вуглецю?
6. Маятник здійснює затухаючі гармонічні коливання. Визначте фазу цих коливань, якщо їхня амплітуда дорівнює 6 см, а за час, що дорівнює шостій частині періоду, зміщення дорівнює 3 см.

*Достатній рівень*

1. Тенісна кулька, падаючи на стіл, здійснює затухаючі коливання. Знайдіть фазу цих коливань, якщо амплітуда коливань дорівнює 4 см, а за час, що дорівнює чвертї періоду, зміщення дорівнює 2 см.
2. Маятник здійснює гармонічні коливання. Визначте фазу цих коливань, якщо їхня амплітуда дорівнює 8 см,

а за час, що дорівнює третинї періоду, зміщення дорівнює 4 см.

3. В електричний чайник наливо води. Через який час після вмикання чайника вода закипить, якщо  $T = 100 \sin \left( \pi - \frac{\pi t}{60} \right)$ , де  $T$  – температура води (у градусах Цельсія) в момент часу  $t$  (хв.) після вмикання?

*Високий рівень*

1. По провіднику йде трансформований струм зі змінною силою, який виражається функцією  $I = 2 \sin 100t + 2 \sin \left( 100t + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left( 100t + \frac{\pi}{2} \right)$ . Чи існують такі моменти часу  $t$ , за яких сила струму в провіднику дорівнює 4 А?

2. Кулька, підвішена до пружини, здійснює вертикальні гармонічні коливання за законом  $\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} = 0$ .

Знайдіть кут відхилення під час таких коливань.

3. В наслідок взаємодії природного газу і повітря можливий сильний вибух. Знайдіть найменший коефіцієнт співвідношення об'ємів газу і повітря, за якого відбувається вибух, якщо це співвідношення записується рівнянням  $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \frac{1}{8}$ , де  $x = V \cdot \pi$  ( $V$  – коефіцієнт співвідношення об'ємів).

Як показують результати експериментальної перевірки, розглянуті задачі ілюструють прикладний характер математики, допомагають повторення і поглибленню матеріалу, який вивчається не лише на уроках алгебри і початків аналізу, а й фізики, знайомлять учнів з деякими методами розв'язування задач, що зустрічаються на практиці; виробляють в учнів більш загальні погляди на природу.

**Список використаних джерел:**

1. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти // Математика в школі. – 2000. – № 10. – С. 2.
2. Смержевський Л.О. Задачі з алгебри і початків аналізу: 1001 задача прикладного змісту: 10–11 кл. / Л.О. Смержевський, П.С. Атаманчук, А.М. Кух. – К.: А.С.К., 1999. – 135 с.
3. Смержевський Л.О. Про використання фізичних задач в шкільному курсі математики / Л.О. Смержевський, Ю.Л. Смержевський // Зб. наук. пр. Кам.-Под. педуніверситету: Серія педагогічна: Дидактика природознавчо-математичних дисциплін та освітніх технологій, 1999. – Вип. 5. – С. 193–197.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 352 с.

The standards of level physical tasks are given in the article, what authors suggest to use on the lessons of algebra and beginnings of analysis of a 10 class at the study of trigonometric functions with the purpose of activation of cognitive activity of students.

**Key words:** levels of educational activity of students, level physical tasks, trigonometric functions, trigonometric equalizations and inequalities.

Отримано: 28.08.2011