5. Зайцева Ж.Н., Рубин Ю.Б., Солдаткин В.И., Титарев Л.Г., Тихомиров В.П., Хорошилов А.В., Ярных В.В. Открытое образование: предпосылки, проблемы и тенденции развития / Под общей ред. В.П. Тихомирова. – М.: Изд–во МЭСИ, 2000.
6. Зайцева Ж.Н., Рубин Ю.Б., Титарев Л.Г., Титарев Д.Л., Тихомиров В.П., Хорошилов А.В., Ярных В.В., Яхшибекян А.А. Интернет–образование: не миф, а реальность XXI века / Под общей ред. В.П.Тихомирова. – М.: Изд–во МЭСИ, 2000.
7. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Под ред. Е.С. Полат. – М., 1999. – С.320.

In this floor questions are examined about influence and introduction informative to technology as one of basic instruments of the masses of medias.

Key words: the masses of medias, information technologies, information, informative systems.

Отримано: 4.09.2010

УДК 378

А. І. Закусило

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

ПРО ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛІВ ТЕХНОЛОГІЙ

Висвітлені деякі тенденції розвитку сучасної математичної освіти. Наведені аргументи на користь впровадження у процес викладання вищої математики лабораторних занять з використанням комп'ютера, а також конкретні приклади використання комп'ютерних програм GRAN та BASIC у процесі викладання вищої математики при підготовці вчителів технологій.

Ключові слова: математика, викладання, комп'ютер, лабораторні заняття, GRAN, BASIC.

1. Потужною тенденцією розвитку сучасної цивілізації є бурхливі темпи її комп'ютеризації, розвитку і впровадження нових інформаційних технологій (НІТ). Не є винятком і освітня галузь, де вже досить давно НІТ є предметом особливої уваги широкого кола фахівців.

Як слушно зазначає у передмові до [2] академік АПН України Жалдак М.І., комп'ютеризація "відкриває широкі перспективи щодо гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності".

Зростання питомої ваги НІТ є характерною тенденцією для сучасного навчального процесу. Ця обставина, безперечно, стосується і процесу викладання математики. Протягом останніх кількох десятиліть багато відомих фахівців високої кваліфікації працюють над впровадженням *комп'ютерних технологій* у процес викладання математики в різних навчальних закладах, маючи метою своєї праці поліпшення ефективності навчального процесу та якості знань студентів, причому кількість таких фахівців постійно збільшується.

Однак при використанні комп'ютерних технологій виникає цілий ряд проблем, що стосуються змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання. З одного боку, використання комп'ютера дає можливість розв'язувати цілий ряд типових задач, навіть не знаючи відповідного аналітичного апарату. Студент стає користувачем математичних методів, не володіючи (можливо) цими методами по суті, тобто так, як він використовує комп'ютерні програми загального користування, такі як Word, Excel тощо. З іншого боку, комп'ютерний супровід вивчення математики дає змогу отримати наочні уявлення про поняття, розвиває просторову уяву, дає унікальні можливості проводити складну дослідницьку роботу, яка в силу величезної громіздкості була б практично неможливою без використання комп'ютера.

2. На сьогодні існує цілий ряд програмних засобів (більшість з яких є, на жаль, англомовними), що призначені для розв'язування різного типу математичних задач різного рівня складності. Однак найбільш придатною для підтримки вивчення математики в середніх і вищих навчальних закладах є відома україномовна програма GRAN, яку розроблено в НПУ імені М.П. Драгоманова колективом вітчизняних фахівців під керівництвом академіка АПН України Жалдака М.І. Можливості використання цієї програми для комп'ютерної підтримки викладання вищої математики докладно висвітлено в [2].

Важливою цінною рисою цієї програми є те, що вона, з одного боку, дає можливість користувачу, який навіть не володіє відповідним математичним апаратом, в багатьох типових задачах швидко одержати правильну відповідь, а з іншого боку, завдяки широким можливостям цієї програми учні можуть розв'язувати і досить складні нестандартні задачі.

3. Відомо, що велика кількість фізичних, технічних та інших завдань зводиться до розв'язування *типових математичних задач*. Однією з таких задач є рівняння з однією змінною. При розв'язуванні таких рівнянь можна скористатись різними програмними засобами.

Досить ефективним є графічний метод, який можна успішно реалізувати за допомогою *програми GRAN*. Досвід моєї роботи в Інституті гуманітарно-технічної освіти НПУ ім. М.П. Драгоманова показує, що цю програму добре сприймають студенти – майбутні вчителі технологій.

Суттєвим недоліком графічного методу є те, що одержувані корені рівняння є наближеними, а не точними. Однак часто для практичних потреб буває достатньо знайти значення шуканого кореня з деякою заданою точністю.

Для одержання коренів рівняння $f(x)=0$ з будь-якою точністю (зрозуміло, в межах можливостей комп'ютера) зручно скористатись *методом половинного ділення*, який можна реалізувати за допомогою обчислювальної програми, створеної однією з мов програмування. При цьому бажано, щоб ця мова була якомога простішою. Це може бути, наприклад, *мова BASIC* (Бейсік), яка є цілком доступною не тільки для студентів, а навіть для учнів середніх класів. Одну з версій цієї мови викладено в [4].

Приклад 1. Обчислити з точністю до 10^{-6} корені рівняння $x^3-3x-1=0$.

Розв'язування. Побудуємо графік функції $y=x^3-3x-1$ (*рис. 1*).

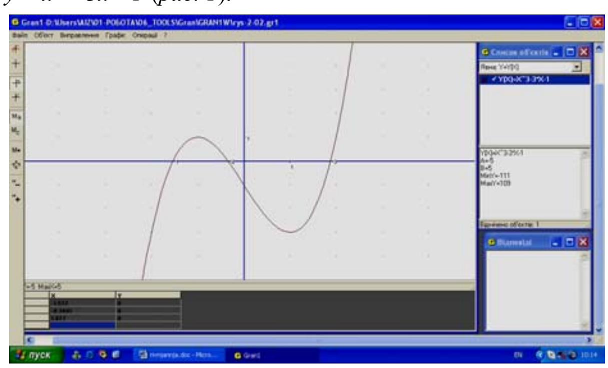

Рис. 1

Бачимо, що цей графік перетинає вісь *Ox* в трьох точках:

$$x_1 \approx -1{,}5; \quad x_2 \approx -0{,}3; \quad x_3 \approx 1{,}9 .$$

Маємо відокремлені корені:

$$x_1 \in [-2;-1], \quad x_2 \in [-1;0]; \quad x_3 \in [1;2] .$$

Зауважимо, що цей результат можна одержати, записавши задане рівняння у вигляді $x^3=3x+1$ та побудувавши в одній системі координат два простіші графіки: $y = x^3$ та $y = 3x + 1$.

Далі скористаємось наступною BASIC-програмою:

```
10 DEF fnf(x)=x^3-3*x-1
20 a=-2: b=-1
30 e=.000001
40 c=(a+b)/2
50 IF fnf(a)*fnf(c)<0 THEN b=c ELSE a=c
60 IF b-a>2*e THEN 40 ELSE x=(a+b)/2
70 PRINT "x="; USING "##.######"; x
```

Результатом роботи цієї програми є: $x = -1.532088$.

Замінивши у рядку 20 кінці проміжку $[a,b]$ на -1 та 0, одержимо другий корінь: $x = -0.347297$. Аналогічно для проміжку $[1;2]$ одержимо третій корінь: $x = 1.879386$.

Відповідь:

$$x_1 \approx -1{,}532088; \quad x_2 \approx -0{,}347297; \quad x_3 \approx 1{,}879386.$$

Зауважимо, що це рівняння можна розв'язати як кубічне (за формулами Кардано), однак це виходить за межі більшості університетських програм з вищої математики для нематематичних спеціальностей.

Іноді рівняння взагалі не може бути розв'язане елементарними методами. Однак, якщо дійсні корені існують, то їх досить просто можна обчислити з досить високою точністю, наприклад, комбінуючи графічний метод та метод половинного ділення.

4. Величезна кількість різноманітних задач, які виникають у фізичних, технічних та інших науках, зводяться до розв'язування систем рівнянь з кількома змінними.

У випадку двох змінних досить ефективним є графічний метод, який можна успішно реалізувати за допомогою програми GRAN. Ця програма дає можливість будувати на площині xOy лінії, що задані у неявному вигляді $F(x,y) = 0$. Отже, можна досить просто розв'язувати системи двох нелінійних рівнянь з двома змінними (зауважимо, що такі системи можуть бути взагалі нерозв'язними аналітично). При цьому важливо, що за допомогою програми GRAN можна одержати розв'язки системи з досить високою точністю (але, зрозуміло не як завгодно високою, а лише в межах можливостей комп'ютера).

Кілька методів наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь подано в [1] (глава XIII). Зокрема, розглянуто метод Ньютона для системи рівнянь виду

$$\begin{cases} F(x,y) = 0; \\ G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Там же зауважено, що ці методи є алгоритмічними, тому вони можуть бути реалізовані на ЕОМ (комп'ютері), але прикладів такої реалізації автори не наводять.

Метод Ньютона можна реалізувати за допомогою обчислювальної програми, створеної однією з мов програмування, наприклад, мовою BASIC.

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 y + 2y - 12 = 0; \\ 4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

методом Ньютона з точністю до 10^{-6}.

Розв'язування. Позначимо:

$$F(x,y) = x^2 y + 2y - 12;$$

$$G(x,y) = 4x^2 + y^2 - 16x - 4y + 4.$$

Знаходимо частинні похідні:

$$F_x'(x,y) = 2xy; \qquad F_y'(x,y) = x^2 + 2;$$

$$G_x'(x,y) = 8x - 16; \qquad G_y' = 2y - 4.$$

Знайдемо початкові наближення, побудувавши графіки $F(x,y) = 0$ та $G(x,y) = 0$. Для знаходження цих початкових наближень можна скористатись програмою GRAN (*рис. 2*).

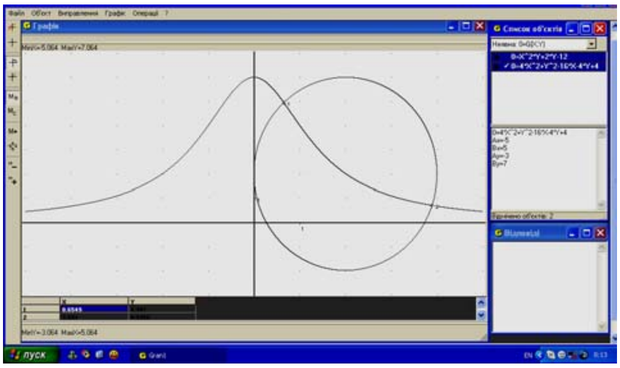

Рис. 2

Бачимо, що система має два розв'язки, грубі початкові наближення яких є (1; 5) та (4; 1).

Обчислимо розв'язки заданої системи із заданою точністю, використавши наступну BASIC-програму:

```
10 INPUT "X0,Y0"; X,Y
20 E=0.000001
30 F=X^2*Y+2*Y-12
40 G=4*X^2+Y^2-16*X-4*y+4
50 A=2*X*Y: B=X^2+2
60 C=8*X-16: D=2*Y-4
70 DET=A*D-C*B
80 DX=F*D-G*B: DY=A*G-C*F
90 X1=X-DX/DET: Y1=Y-DY/DET
100 IF ABS(X1-X)>E OR ABS(Y1-Y)>E
THEN X=X1:Y=Y1: GOTO 30
110 PRINT USING "X = #.######"; X1
120 PRINT USING "Y = #.######"; Y1
130 END
```

Результатом роботи програми є два розв'язки:

Відповідь:

$$x_1 \approx 0{,}650510,\ y_1 \approx 4{,}952205;\ x_2 \approx 3{,}891426,\ y_2 \approx 0{,}699986.$$

Зауважимо, що BASIC-програми дають можливість одержати розв'язки системи із значно більшою точністю у порівнянні з тією, яку дає програма GRAN.

5. Різноманітні задачі, які виникають у фізичних, технічних та інших науках, часто зводяться до обчислення визначених інтегралів.

Відомо, що ця задача, взагалі кажучи, не є простою в тому розумінні, що точне обчислення визначених інтегралів за відомою формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

може бути дуже громіздким (якщо функція $F(x)$ є дуже складною) або навіть неможливим (оскільки в багатьох випадках первісну функцію $F(x)$ неможливо знайти за допомогою елементарних засобів). Тому часто доцільно або навіть необхідно застосовувати наближені методи.

Якщо при цьому висока точність не є необхідною, то досить просто можна знайти наближене значення інтеграла, скориставшись, наприклад, програмою GRAN.

Якщо потрібна більш висока точність, то слід застосувати інші, більш точні "інструменти" для обчислень. Відомо багато різних програмних засобів, тобто готових програм, якими можна скористатись для вирішення проблеми збільшення точності: *MathCad, MathLab* та багато інших. Однак більшість з них є англомовними, що створює певні незручності при їх використанні.

Підходящим "інструментом" для забезпечення потрібної точності може служити власна програма, написана для конкретного методу однією з простих мов програмування. Такою мовою може бути, наприклад, мова BASIC.

Відомо багато методів наближеного обчислення визначених інтегралів. Деякі з них викладені в [1] (глава XVI). Ці методи є алгоритмічними, тому вони можуть бути реалізовані на комп'ютері.

Найпростішою формулою, яка застосовується для наближеного обчислення визначених інтегралів, є формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right),$$

де $y_i = f(x_i), \quad (i=0,1,...,n)$.

Залишковий член має вигляд: $R_1 = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$, де $\xi \in [a,b]$.

Основна задача полягає у виборі h – *кроку інтегрування*, при якому забезпечується задана точність ε при обчисленні визначеного інтеграла за цією формулою чисельного інтегрування. Одним із способів розв'язування цієї задачі є вибір кроку за оцінкою залишкового члена. Нехай потрібно обчислити інтеграл з точністю ε. Використовуючи формули відповідного залишкового члена *R*, вибирають *h* таким, щоб виконувалась нерівність $|R| < \varepsilon/2$.

Потім обчислюють інтеграл за наближеною формулою з одержаним кроком. При цьому обчислення слід виконувати з таким числом знаків, щоб похибка округлення не перевищувала $\varepsilon/2$.

Зауважимо, що іноді допустиму похибку ε ділять між похибкою зрізування і похибкою округлення *не порівну*. Наприклад, якщо обчислення значень $f(x_i)$ можуть бути виконані з будь-якою точністю, то може бути доцільно вибрати крок *h* із умови $|R| < \varepsilon$ (зрозуміло, що з досить високою точністю можна виконувати обчислення на комп'ютері).

Приклад 3. Обчислити $\int_0^1 e^{x^2}dx$ за формулою трапецій з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, вибираючи крок за оцінкою залишкового члена.

Розв'язування. Виберемо спочатку крок інтегрування, оцінюючи залишковий член формули трапецій, тобто візьмемо крок *h* таким, щоб виконувалась нерівність:

$$\frac{(b-a)h^2}{12}\max_{[a,b]}|f''(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{де } f(x) = e^{x^2}.$$

Далі знаходимо: $f'(x) = 2xe^{x^2}$; $f''(x) = 2(2x^2+1)e^{x^2}$.

Оскільки $f''(x)$ – функція зростаюча на $[0;1]$, то

$$\max_{[0;1]}|f''(x)| = f''(1) = 6e.$$

Нерівність набуває вигляду:

$$\frac{(1-0)h^2}{12}\cdot 6e < \frac{10^{-4}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 < \frac{10^{-4}}{e} \quad \Leftrightarrow \quad h < \frac{0{,}01}{\sqrt{e}}.$$

Візьмемо $h = 0{,}005$ (оскільки $0{,}005 = \frac{0{,}01}{\sqrt{4}} < \frac{0{,}01}{\sqrt{e}}$).

Визначимо точність ε_0, з якою слід обчислювати значення підінтегральної функції, з умови

$$(b-a)\varepsilon_0 \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}5\cdot 10^{-4}.$$

При обчисленні на комп'ютері ця точність забезпечується.

Виконаємо обчислення за формулою трапецій при

$$a=0, b=1, f(x)=e^{x^2}, h=0{,}005 \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = 200.$$

Скористаємось наступною BASIC-програмою:

```
10 DEF fnf(x)= EXP(x^2)
20 a=0 : b=1 : h=0.005 : n=200
30 y0= fnf(a) : yn= fnf(b)
40 s=0
50 FOR i=1 TO n-1 : s=s+fnf(a+i*h) : NEXT
60 s=h*((y0+yn)/2+s)
70 PRINT USING "I=#.####"; s
```

Одержимо I = 1.4627. *Відповідь:* 1,4627.

Зауважимо, що при потребі точність можна значно збільшити.

Отже, BASIC-програми дають можливість одержати розв'язки задач із набагато більшою точністю у порівнянні з тією, яку дає програма GRAN. Однак для цього потрібно мати належну математичну підготовку, а також володіти в необхідному обсязі однією з мов програмування (наприклад, мовою BASIC).

6. Комп'ютерна підтримка вивчення математики є одним з важливих факторів стимулювання студентів до активної навчально-пізнавальної діяльності. Комп'ютерний супровід робить математику більш доступною та цікавою, що зумовлює добрий педагогічний ефект при викладанні математики.

При використанні комп'ютерних технологій зміст і структура навчання можуть змінюватись у досить широкому діапазоні, причому в силу наочності та оперативності одержуваних результатів можна очікувати досягнення значного підвищення ефективності та якості навчання студентів незалежно від рівня їх математичної підготовки. Тому цілком природною виглядає доцільність суттєвого збільшення питомої ваги комп'ютерних технологій у процесі викладання вищої математики.

Сьогодні не можна не помічати, що в навчальних планах багатьох університетів України на *лабораторні роботи з вищої математики* не відведено жодної години, хоча про цілковиту доцільність лабораторного практикуму з вищої математики можна довідатись з численних літературних джерел. Наприклад, ще в далекі радянські (але вже цілком "комп'ютерні") часи з'явилася книга [3], де в передмові зазначено, що цей лабораторний практикум складений у відповідності з 510-годинною програмою курсу "Вища математика" для вищих технічних навчальних закладів і містить 23 лабораторні роботи з цього курсу. Сьогодні ці цифри, на жаль, вражають. Думаю, що для вивчення вищої математики студентам (особливо технічних і технологічних спеціальностей) потрібно надати набагато більше часу, ніж є зараз, адже всі цивілізовані країни приділяють величезну увагу фундаментальній освіті своїх фахівців. Тому з огляду на сучасні світові тенденції розвитку науки і освіти цілком природно виглядає потреба як суттєвого збільшення питомої ваги комп'ютерних технологій у процесі викладання вищої математики, так і загального часу, що відводиться на її вивчення.

Комп'ютерна підтримка вивчення математики може успішно здійснюватись на всіх видах занять, однак насамперед слід наголосити на доцільності ширшого впровадження *лабораторних занять*, особливо для студентів *нематематичних спеціальностей*, – з тим, щоб студенти оволоділи доступними сучасними програмними засобами для розв'язування типових математичних задач.

На жаль, сьогодні ще не всі навчальні заклади (і навіть університети, інститути) достатньо оснащені сучасною комп'ютерною технікою, але це не повинно бути перешкодою для розробки і впровадження в навчальний процес комп'ютерних технологій навчання.

Список використаних джерел:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука. – 1970.
2. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. − К.: Техніка, 1997.
3. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. − М.: Высшая школа, 1983.
4. Светозарова Г.И., Мельников А.А., Козловский А.В. Практикум по программированию на языке бейсик: Учебное пособие для вузов. – М., 1988.

Some progress trends of modern mathematical education are illustrated. The arguments for introduction into the process of higher mathematics teaching of laboratory trainings with using the computer are given, and also concrete examples of using of the computer programs GRAN and BASIC in the process of higher mathematics teaching when training teachers of technologies.

Key words: mathematics, teaching, computer, laboratory trainings, GRAN, BASIC.

Отримано: 19.05.2010