

## ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Розглянуто питання розвитку теорії гібридних інтегральних перетворень та її застосувань до задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

**Ключові слова:** інтегральне перетворення, диференціальний оператор, задача математичної фізики, умови спряження.

**Вступ.** За останні десятиріччя в практику аналітичної теорії теплопровідності, термомеханіки, теорії пружності та інші розділи математичної фізики глибоко проникли методи розрахунку температурних полів і полів напружень, що ґрунтуються на застосуванні інтегральних перетворень.

З точки зору математики метод інтегральних перетворень еквівалентний методу власних функцій, але він має і суттєві переваги. До цих переваг слід віднести, у першу чергу, стандартну техніку обчислень, а також можливість подання розв'язку задачі у різних формах. Це особливо важливо у застосуваннях, коли необхідно отримувати розв'язки в зручному для розрахунків вигляді як для малих, так і для великих значень аргументів. Нарешті, при наявності значної кількості таблиць прямих та обернених перетворень техніка розв'язання задачі значно спрощується і прискорюється. Але потрібно зауважити, що для методу інтегральних перетворень характерні ті ж обмеження, що і для методу відокремлення змінних. Він застосовний тільки для лінійних диференціальних рівнянь з лінійними крайовими умовами, хоча є спроби його застосування для розв'язання деяких нелінійних крайових задач.

**Основна частина.** Інтегральні перетворення, які використовуються в задачах математичної фізики, можна умовно поділити на три класи:

- 1) перетворення щодо часової змінної на проміжку  $(0; \infty)$ ;
- 2) перетворення щодо геометричних змінних в нескінченних межах;
- 3) перетворення щодо геометричних змінних в скінченних межах.

До першого класу відносять добре і давно відомі перетворення Лапласа та Лапласа-Карсона, які є основою операційного числення. До другого і третього класу належать перетворення Фур'є, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля, Мелліна, Мелера-Фока, Конторовича-Лебедева та ін., вибір яких визначається геометрією області геометричних змінних та структурою диференціального оператора і крайових умов.

Всі вказані вище інтегральні перетворення успішно застосовуються для розв'язання лінійних крайових задач математичної фізики з неперервними коефіцієнтами. Однак, в останній час у зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів (у будівництві, техніці, технології), виникла необхідність в розрахунку температур і температурних напружень в тілах, що складаються з матеріалів, які мають різні фізико-технічні характеристики.

У цьому контексті особливої уваги заслуговує досить поширений у другій половині ХХ століття для вивчення стану композитних об'єктів метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик [див., наприклад, 1-6]. Але його застосування приводить до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу  $\delta$ -функції Дірака та її похідних, тому одержати точні розв'язки відповідних задач математичної фізики навіть у найбільш простих випадках практично неможливо. Ці труднощі можна обійти, якщо здійснити моделювання фізичного процесу, який досліджується, методом гібридних диференціальних операторів. Останнє вимагає відповідного математичного апарату. Зокрема, виникає необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які б давали можливість алгебраїзації диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами. Перетворення вказаного типу одержали назву гібридних інтегральних перетворень. В кінці 60-х років минулого століття з'явилися роботи Я.С. Уфлянда та його учнів, в яких класичні інтегральні перетворення Фур'є, Фур'є-

Бесселя, Лежандра поширюються на випадок складених областей [див., наприклад, 7-12]. Своє продовження ці дослідження знайшли у працях В.С. Проценка та його учнів [див., наприклад, 13-17].

Характерною особливістю згаданих робіт є те, що розглядається тільки одна точка спряження ( $x = a$  або  $r = R_0$ ) в припущенні наявності в ній умов контакту вигляду

$$\begin{cases} (u_1 - \mu_0 u_2)|_{x=a} = 0, \\ \left( \frac{du_1}{dx} - \mu_1 \frac{du_2}{dx} \right)|_{x=a} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Але, при здійсненні неідеального термічного контакту, що природно, перша з умов спряження (1) матиме вигляд

$$\left[ \left( r_0 \frac{d}{dx} + 1 \right) u_1 - u_2 \right]_{x=a} = 0, \quad (2)$$

а в задачах термопружності (наприклад, для симетричних тіл) при наявності ідеального механічного контакту замість другої умови спряження (1) матимемо умови

$$\left[ \left( \frac{d}{dx} + \beta_1 \right) u_1 - \mu_1 \left( \frac{d}{dx} + \beta_2 \right) u_2 \right]_{x=a} = 0. \quad (3)$$

Отже, практично важливі задачі з різних галузей науки і техніки приводять до умов спряження

$$\begin{cases} \left[ \left( \alpha_{11} \frac{d}{dx} + \beta_{11} \right) u_1 - \left( \alpha_{12} \frac{d}{dx} + \beta_{12} \right) u_2 \right]_{x=a} = 0, \\ \left[ \left( \alpha_{21} \frac{d}{dx} + \beta_{21} \right) u_1 - \left( \alpha_{22} \frac{d}{dx} + \beta_{22} \right) u_2 \right]_{x=a} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Якщо прийняти до уваги, що найпростіший композит має дві точки спряження, то потрібні гібридні інтегральні перетворення принаймні на трискладовому інтервалі. В той же час приклади розрахунків термопружних полів та електричних контурів в ортотропних та анізотропних середовищах вказують на необхідність у гібридних інтегральних перетвореннях на інтервалі  $(a, b)$  з довільним, але скінченним числом точок спряження, в кожній з яких виконуються умови контакту типу (4).

Подальший розвиток теорії гібридних інтегральних перетворень знайшла у працях М.П. Ленюка та його учнів [див., наприклад, 18-22]. Зокрема, за найбільш загальних обмежень на структури диференціальних операторів, крайових умов та умови спряження побудовано гібридні інтегральні перетворення типу Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го й 2-го роду, Конторовича-Лебедева, породжені диференціальними операторами Бесселя

$$B_{v,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{v^2 - \alpha^2}{r^2} \quad (5)$$

та гібридні інтегральні перетворення Фур'є на осі, півосі та сегменті, породжені диференціальними операторами Фур'є

$$F_j = \frac{d^2}{dx_j^2}. \quad (6)$$

Наявність основної тотожності інтегрального перетворення відповідного гібридного диференціального оператора дає можливість успішно застосовувати ці перетворення до розв'язування лінійних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ у сферичній [див., наприклад, 24-35], циліндричній [див., наприклад, 36-45] та декартовій [див., наприклад, 23, 46-54] системах координат.

Зазначимо також, що при розв'язуванні осесиметричних задач теорії потенціалу в областях, утворених двома сферами, що перетинаються, та в областях, обмежених поверхнями гіперболоїдів обертання і тороїдальними поверхнями, ефективно використовуються інтегральні перетворення Мелера-Фока, породжені диференціальним оператором Лежандра

$$\Lambda_m = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{m^2}{sh^2 r} \quad (7)$$

[див., наприклад, 55-58].

Природним узагальненням диференціального оператора (7) є диференціальний оператор

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right), \quad (8)$$

$$(\mu) = (\mu_1; \mu_2),$$

дослідженню якого та побудові інтегральних і гібридних інтегральних перетворень, породжених цим оператором, присвячені роботи Н.О. Вірченко, І.М. Конета, М.П. Ленюка, І.А. Федотової [див., наприклад, 59-65]. Зазначимо також, що інтегральні перетворення типу Мелера-Фока виявилися ефективними при побудові фундаментальних розв'язків нових класів інваріантних диференціальних рівнянь з узагальненим оператором Лежандра в однозв'язних областях  $n$ -вимірному евклідовому простору і на спеціальних ріманових многовидах [див., наприклад, 66-70].

Результати автора з теорії гібридних інтегральних перетворень та їх застосувань впроваджені в навчальний процес у вигляді нормативного курсу "Актуальні задачі математичної фізики" та спеціального курсу "Методи інтегральних перетворень" для магістрантів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Вони використовуються також студентами, магістрантами і здобувачами при написанні курсових, дипломних та магістерських робіт і кандидатських дисертацій.

**Висновки.** Висвітлено питання розвитку теорії гібридних інтегральних перетворень та її застосувань до задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ, зокрема, аналітичної теорії теплопровідності. Основну увагу зосереджено на гібридних інтегральних перетвореннях, породжених класичними диференціальними операторами математичної фізики (Бесселя, Фур'є, Лежандра).

#### Список використаних джерел:

1. Подстригач Я.С. Неустановившіся температурні поля і напруження в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1972. – 208 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Подстригач Я.С. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, М.М. Семерак. – К. : Наук. думка, 1981. – 342 с.
4. Коляно Ю.М. Температурные напряжения от объемных источников / Ю.М. Коляно, А.Н. Кулик. – К. : Наук. думка, 1983. – 288 с.
5. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
6. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М. : Наука, 1967. – 402 с.
8. Белова Н.А. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра / Н.А. Белова, Я.С. Уфлянд // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 8. – С. 1397-1399.
9. Юшкова Е.А. О некоторых сингулярных краевых задачах для уравнения Бесселя и их приложений в математической физике / Е.А. Юшкова // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 10. – С. 1403-1407.
10. Белова Н.А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода / Н.А. Белова // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 11. – С. 2006-2010.

11. Ефимова И.Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям / И.Т. Ефимова // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 3, № 5. – С. 817-822.
12. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л. : ЛГУ, 1976. – С. 93-106.
13. Проценко В.С. Гибридные интегральные преобразования Фурье-Ханкеля и некоторые задачи кручения кусочно-однородных сред / В.С. Проценко, Т.Т. Кашаев // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку : сб. науч. тр. – Х., 1978. – Вып. 1. – С. 120-124.
14. Проценко В.С. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения к теории упругости неоднородных сред / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная математика. – 1982. – Т. XIII, № 1. – С. 62-67.
15. Проценко В.С. Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье-Лежандра / В.С. Проценко, А.В. Головченко // Математические методы анализа динамических систем : сб. науч. тр. – Харьков, 1982. – Вып. 6. – С. 26-28.
16. Найда Л.С. Гибридные интегральные преобразования типа Ханкеля-Лежандра / Л.С. Найда // Математические методы анализа динамических систем : сб. науч. тр. – Х., 1984. – Вып. 8. – С. 132-135.
17. Проценко В.С. К решению некоторых задач математической физики для составных областей / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем : сб. науч. тр. – Х., 1987. – Вып. 11. – С. 56-64.
18. Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования. – Т. 1. / М.П. Ленюк, Т.Н. Романович, Н.И. Шинкарик. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1994. – 264 с.
19. Ленюк М.П. Матричные интегральные преобразования / М.П. Ленюк, О.Э. Яремко. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 240 с.
20. Ленюк М.П. Интегральні перетворення Фур'є-Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах / М.П. Ленюк, М.Р. Петрик. – К. : Наук. думка, 2000. – 372 с.
21. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці : Прут, 2001. – 228 с.
22. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебедева / М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці : Прут, 2002. – 280 с.
23. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К. : Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
24. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І.М. Конет. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
25. Конет І.М. Нестационарна задача теплопровідності для багатопарових ортотропних парашутних просторів з порожниною / І.М. Конет // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и их приложения : сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. – К., 1997. – С. 119-124.
26. Конет І.М. Нестационарна задача теплопровідності для ортотропних парашутних тіл з порожниною / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Доп. НАН України. – 1998, № 12. – С. 19-24.
27. Конет І.М. Нестационарні задачі теплопровідності для кусково-однорідних клиновидних сферичних областей / І.М. Конет // Вісник Державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика, 1998. – Т. 2, № 337. – С. 220-222.
28. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатопарових ортотропних парашутних просторах з порожниною / І.М. Конет // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения : сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. – К., 1998. – С. 118-121.
29. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатопарових ортотропних клиновидних парашутних просторах / І.М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1. – С. 102-116.
30. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатопарових ортотропних клиновидних парашутних просторах з порожниною / І.М. Конет // Крайові задачі для диференціаль-

- них рівнянь : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 2. – С. 129-143.
31. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатощарових ортотропних клиновидних суцільних парашутних тілах / І.М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 3. – С. 55-68.
  32. Конет І.М. Нестационарна задача теплопровідності для багатощарових ортотропних парашутних просторів / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Вісник Київського ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 1998. – Вип. 2. – С. 53-62.
  33. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатощарових ортотропних клиновидних порожнистих парашутних тілах / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Вісник Київського ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 101-114.
  34. Конет І.М. Стационарні температурні поля в багатощарових ортотропних парашутних просторах / І.М. Конет, М.І. Лисак // Математичні методи в науково-технічних дослідженнях : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1996. – С. 147-156.
  35. Конет І.М. Математичне моделювання нестационарних температурних полів у багатощарових ортотропних порожнистих парашутних тілах / І.М. Конет, М.І. Лисак // Фізико-технічне та технологічне прикладження математичного моделювання : сб. науч. тр. / НАН України. Ін-т математики. – К., 1998. – С. 124-127.
  36. Конет І.М. Стационарні та нестационарні задачі теплопровідності для багатощарових ортотропних клиновидних циліндрично-кругових областей / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Рута, 2000. – 136 с.
  37. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с.
  38. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004. – 276 с.
  39. Конет І.М. Математичне моделювання стационарних температурних полів у багатощарових напівобмежених циліндрично-кругових тілах / І.М. Конет // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – Донецк, 2001. – Т. 6. – С. 56-60.
  40. Конет І.М. Математичне моделювання стационарних температурних полів у багатощарових необмежених циліндрично-кругових просторах / І.М. Конет // Вісник Запорізького держ. ун-ту : зб. наук. статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя : Запорізький держ. ун-т, 2002. – № 1. – С. 42-45.
  41. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності для обмежених багатощарових циліндричних тіл / І.М. Конет // Доп. НАН України. – 2007, № 3. – С. 14-20.
  42. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності для двоскладових циліндричних просторів / І.М. Конет // Доп. НАН України. – 2007, № 4. – С. 17-22.
  43. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності для багатощарових циліндричних півпросторів / І.М. Конет // Доп. НАН України. – 2007, № 5. – С. 17-24.
  44. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в напівобмежених багатощарових циліндричних областях / І.М. Конет // Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – Вип. 8. – С. 117-138.
  45. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності для обмежених багатощарових циліндричних тіл з порожниною / І.М. Конет // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2007. – Вип. 17-18. – С. 62-66.
  46. Громик А.П. Стационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2008. – 120 с.
  47. Громик А.П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. – 120 с.
  48. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності для обмежених багатощарових просторових областей / А.П. Громик, І.М. Конет // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2008. – Вип. 19-20. – С. 65-72.
  49. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ / А.П. Громик, І.М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т, 2008. – Вип. 1. – С. 71-88.
  50. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарних процесів теплопровідності в напівобмежених багатощарових просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т, 2008. – Вип. 1. – С. 26-41.
  51. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків стационарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2. – С. 54-65.
  52. Конет І.М. Математичне моделювання стационарних процесів теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2. – С. 68-80.
  53. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 10-17.
  54. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених багатощарових просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2010. – Вип. 24. – С. 12-19.
  55. Фок В.А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком / В.А. Фок // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 7. – С. 253-256.
  56. Улитко А.Ф. Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера-Фока / А.Ф. Улитко // Прикладная механика. – 1967. – Вип. 5. – С. 45-49.
  57. Лебедев Н.Н. Интегральные разложения родственных преобразованиям Мелера-Фока / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1515-1523.
  58. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А.Ф. Улитко. – К. : Академ периодика, 2002. – 342 с.
  59. Федотова И.А. Об одном интегральном преобразовании с обобщенными присоединенными функциями Лежандра / И.А. Федотова // Вычисл. и прикл. математика. – К., 1990. – Вип. 71. – С. 33-44.
  60. Вирченко Н.А. Обобщенные функции Лежандра и их применение / Н.А. Вирченко, И.А. Федотова. – К. : НТУУ (КПИ), 1998. – 158 с.
  61. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2002. – 248 с.
  62. Конет І.М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера-Фока на полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з  $n$  точками спряження / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Доп. НАН України. – 2006. – № 9 – С. 22-27.
  63. Конет І.М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера-Фока на полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  з  $n$  точками спряження / І.М. Конет, М.П. Ленюк // Математичні студії. – 2006. – Т. 26, № 2. – С. 169-180.
  64. Конет І.М. Узагальнене гібридне інтегральне перетворення типу Мелера-Фока 1-го роду та його застосування

- / I.M. Konet // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59. – № 10. – С. 1376-1390.
65. Konet I.M. Generalized hybrid integral Mellier-Fok transform of the second type and its applications / I.M. Konet // *Miskolc mathematical notes*. – 2007. – Vol 8, № 1. – P. 43-60.
66. Конет І.М. Фундаментальні розв'язки для інваріантних  $\Lambda_{(\mu)}$ -еліптичних операторів на ріманових многовидах / I.M. Konet // *Нелинейные граничные задачи : сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т прикладной математики и механики. – Донецк, 2005. – Вып. 15. – С. 154-161.*
67. Конет І.М. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних  $\Lambda_{(\mu)}$ -гіперболічних операторів на ріманових многовидах / I.M. Konet // *Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 224-233.*
68. Конет І.М. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних  $\Lambda_{(\mu)}$ -параболічних операторів на ріманових многовидах / I.M. Konet, М.П. Ленюк // *Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. пр. Математика. – Чернівці : Рута, 2006. – Вип. 288. – С. 61-73.*
69. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра / I.M. Konet. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2007. – 136 с.
70. Конет І.М. Фундаментальний розв'язок для інваріантних еліптичних рівнянь з узагальненим оператором Лежандра на ріманових многовидах / I.M. Konet, М.П. Ленюк // *Вісник національного університету "Львівська політехніка". Серія фізико-математичних наук. – Львів, 2009. – № 643. – С. 53-56.*

The question of hybrid theory of integral transforms and its application to problems of mathematical physics heterogeneous environments.

**Key words:** integral transform, differential operators of mathematical physics, matching.

Отримано: 24.10.2010

УДК 53:378.147(045)

В. В. Куліш, Н. Л. Козлова, О. Я. Кузнєцова, Г. С. Марінченко

Національний авіаційний університет

## ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ КУРСУ ФІЗИКИ ДЛЯ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ АНГЛІЙСЬКОЮ МОВОЮ

У роботі розглянуто деякі методичні особливості застосування модульно-рейтингових технологій при викладанні курсу фізики для студентів технічних спеціальностей англійською мовою. Як зазначено, в англійськомовному випадку, у порівнянні з аналогічною ситуацією при викладанні українськомовного курсу, виникає ряд методичних особливостей. Останні, переважно пов'язані з тією обставиною, що на одному і тому ж навчальному потоці одночасно навчаються як англійськомовні студенти-іноземці, так і українські студенти. Важливим є те, що на практиці, як правило, їх чисельне співвідношення виявляється сумірним. Модульно-рейтингова організація навчального процесу, яку вибрано як базову, вимагає розробку спеціального англійськомовного комплексу навчально-методичних матеріалів, у якому весь необхідний навчальний матеріал було б зібрано у концентрованої формі. Такий комплекс було авторами створено, видано і впроваджено у навчальну практику Національного авіаційного університету, деякі методичні «англійськомовні» особливості якого також обговорено в даній статті.

**Ключові слова:** самостійна робота, комплекс навчально-методичних матеріалів, модульно-рейтингова навчальна технологія.

**Вступ.** Як відомо, протягом останнього десятиріччя в багатьох провідних ВНЗ України було започатковано так звані «англійськомовні проекти». Головною їх метою є підготовка фахівців різного профілю (в тому числі, і інженерів) з поглибленими знаннями професійної англійської мови. Основний метод досягнення поставленої мети полягає у викладанні всіх (чи переважної більшості) навчальних дисциплін англійською мовою. Курс фізики для інженерних спеціальностей, який читається для студентів першого і другого курсів Національного авіаційного університету (НАУ), також входить до переліку дисциплін, що викладаються англійською мовою (англійськомовний проект тут було започатковано ще в 2000 році). Як показала реальна практика, англійськомовна версія курсу фізики має ряд своїх специфічних методичних особливостей, деякі з яких є предметом уваги даної роботи.

**Деякі методичні особливості викладання курсу фізики англійською мовою.** Слід зазначити, що загальні методико-організаційні засади викладання курсу фізики англійською мовою, як і в українськомовному випадку, визначаються, в основному, тим фактом, що навчальний процес, як ціле, тут побудовано на базі так званих *модульно-рейтингових навчальних технологій* [1]. Поява і активне впровадження таких технологій у навчальну практику було зумовлено, перш за все, різким скороченням аудиторних навчальних годин, що раніше відводились для викладання курсу фізики. Причому, все це відбувалось при збереженні того загального обсягу навчального матеріалу, який традиційно регламентувався відповідними робочими навчальними планами. Як наслідок, 60% і більше навчальних годин перейшло в категорію самостійної роботи (включно з поза аудиторною її формою), на контроль якої, на жаль, не було передбачено відповідних навчальних годин. Як результат конструктивних намагань авторів вирішити цю далеко непросту організаційно-методичну проблему, свого часу було розроблено вище згадану версію модульно-рейтингової

технології. Слід, однак, зазначити, що з моменту появи такої технології, яку в НАУ вперше було розроблено і опрацьовано на базі українськомовного курсу фізики, її відразу було впроваджено при викладанні аналогічного англійськомовного курсу. Але попри всі складності організаційно-методичної ситуації, яка свого часу і спричинила появу самої модульно-рейтингової технології, ситуація з аналогічним англійськомовним курсом виявляється ще напруженішою. Якщо до появи першого комплексу навчально-методичних матеріалів [2] «українізованих» студенти все ж таки мали достатньо різноманітний набір навчальної літератури українською та російською мовами, то у випадку англійськомовного курсу проблема забезпечення студентів подібною англійськомовною літературою набувала драматичнішої форми. Перш за все тому, що значну частину «англійських потоків» склали студенти іноземці, знання яких російської чи української мови на першому курсі навчання ще не дозволяли їм повноцінно самостійно опанувати необхідний навчальний матеріал цими мовами. Зазначимо, що історично це слугувало найбільшим стимулом для авторів до написання обговорюваної тут англійськомовної версії комплексу навчально-методичних матеріалів. На перший погляд здається, що усі напрацьовані в рамках українськомовного курсу фізики базові модульно-рейтингові схеми навчального процесу, методичні і організаційні прийоми можуть бути прямо і безпосередньо перенесено на англійськомовну версію. На практиці, однак, виявилось, що це не зовсім так. Перш за все тому, що значну частину контингенту англійськомовних потоків, як відзначалось, становлять іноземці. У тому числі, вихідці з країн, у яких, в силу певних історичних причин, англійська мова на сьогодні займає особливе положення (таких, наприклад, як Індія, Пакистан, колишні африканські колонії Великобританії тощо). Очевидно, що такі студенти суттєво відрізняються від українських як особливостями їх вітчизняної системи освіти, так і ментальністю та