основу для подальшої самостійної творчості. У поняттях відображаються загальні сутнісні властивості речовин та явищ. Виявлення цих властивостей шляхом порівняння і відбору відкриває можливості для самостійного мислення в процесі навчання. Побудова навчального процесу з медичної та біологічної фізики на основі принципу науковості пізнання закладає фундамент наукового мислення, формує пізнавальний стиль майбутнього фахівця. Для розвитку інтелектуального мислення студента важливо знати, де вихідні факти, в чому суть гіпотези, як із постулатів роблять теоретичні висновки, якими є експериментальні підтвердження справедливості теорії. Оволодіння цими вихідними методологічними поняттями дає можливість уникнути механічного заучування навчального матеріалу та ряду типових для студентів помилок.

Найбільші труднощі викликає вивчення електричного струму в різних середовищах: газах, електролітах, напівпровідниках, а також молекулярні явища у різних агрегатних станах речовини: кипіння, поверхневий натяг рідин, механічні властивості твердих тіл. Досить проблемними є такі теми з оптики: інтерференція, дифракція та поляризація світла. Формалізм виявляється у невмінні застосовувати основні закони та поняття квантової фізики. Більшість випускників не опановує будову та принцип дії лазера, транзистора тощо.

Шляхи усунення недоліків: а) розвиток логічного мислення студентів та акцентування його на зв'язку з власним досвідом; б) розв'язання вже відомих задач з видозміненими умовами, зайвими параметрами; в) розв'язування і детальний аналіз якісних задач, які висвітлюють різні аспекти біофізичних явищ; г) ширше використання методу моделювання; д) розв'язування фізичних задач інтегрованого характеру, які мають конкретну фізичну суть і значущість, а також враховують профілювання навчального матеріалу; е) систематичне проведення зрізних тестувань за темами базового курсу, без яких неможливе свідоме опанування цілісної системи знань з медичної та біологічної фізики; є) організація та проведення консультацій; ж) забезпечення необхідною методичною літературою.

Список використаних джерел:

1. Бутилин Ю.В., Курик М.В., Манжара В.С., Стучинская Н.В. Люминесценция крови при ишемической болезни сердца // Лікарська справа. – 1996. – № 10-12. – С. 72-74.
2. Волькенштейн М.В. Биофизика. – М.: Высш. шк., 1987. – 592 с.
3. Гладун А.Д. Физика в технологическом обществе // Физическое образование в вузах. – 2001. – Т.7. – №3. – 2001.
4. Губанов М.И., Утенбергов А.А. Медицинская биофизика. – М.: Медицина, 1978. – 336 с.
5. Гуляев Ю.В. Физические поля и излучения человека: новые методы ранней медицинской диагностики // Биомедицинская радиоэлектроника. – 2000. – №12. – С. 3-10.
6. Сергієнко В.П. Курс фізики: Навч. посібник. – К.: Майстер-клас, 2006. – 368 с.
7. Стучинська Н.В. Рідинні кристали – основа медичної біофізики // Серія: Педагогічні науки. – Херсон, 2000. – Вип. 5. – С. 219-224.
8. Стучинська Н.В. Елементи біологічної та медичної фізики на уроках фізики // Наукові записки. Зб. наукових праць НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К.: НПУ, 2002. – Вип. 48. – С. 35-42.

In the article the problems of observance of principle of the following and intercommunication of trade education universal and are considered in preparation of future medical workers.

Key words: following, physics, professional preparation, biophysics, phenomenon.

Отримано: 14.04.2008

УДК 372.851

О. О. Курченко, К. В. Рабець

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ В КОНТЕКСТІ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ МАТЕМАТИКІВ

У статті викладена методика вивчення теми "Часткові границі" у нормативному курсі математичного аналізу для математиків. Сутність запропонованої методики полягає в систематичному використанні понять скінченної та нескінченної множин.

Ключові слова: часткові границі, верхня та нижня границі послідовності, точка скупчення, скінченна та нескінченна множини.

1. Вступ

Серед розділів математики математичний аналіз виділяється систематичним застосуванням поняття границі. Ісак Ньютон та Готфрід Лейбніц незалежно один від одного винайшли диференціальне та інтегральне числення, але не дали своєму винаходу належного логічного обгрунтування. Обґрунтувати диференціальне та інтегральне числення вдалося на основі теорії границь, систематизованої Огюстом Коші на початку XIX століття. Без такого фундаменту поняття похідної та інтеграла були внутрішньо суперечливими, що викликало нищівну критику з боку філософів.

Наш досвід викладання математичного аналізу у різних навчальних закладах свідчить, що поняття границі послідовності є глибоким абстрактним поняттям, досить складним для розуміння. Складність традиційного означення границі послідовності зумовлене поєднанням в одному висловленні трьох кванторів: загальності, існування і знову загальності. У статті [1] ми розвинули альтернативний підхід до викладу теорії границь на основі наступного означення границі послідовності: число a називається границею послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ поза ε–околом точки a знаходиться не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n). В основу цієї методики покладено поняття скінченної множини.

Тема "Часткові границі. Верхня та нижня границі послідовності" у нормативному курсі математичного аналізу для студентів спеціальності "математика" класичних університетів та математичних спеціальностей педагогічних університетів вивчається у першому семестрі першого курсу. Глибоке засвоєння цієї теми студентами-математиками є необхідною умовою їх подальшої математичної освіти. Як приклад, наведемо фундаментальну теорему математичного аналізу – теорему Коші-Адамара, в якій радіус збіжності степеневого ряду визначається за допомогою верхньої границі послідовності.

Поняття часткової границі послідовності, верхньої та нижньої границь досить складні для сприйняття студентами-першокурсниками. У більшості підручників часткова границя послідовності визначається як границя підпослідовності. Інше означення часткової границі використовує лише поняття нескінченної множини: число a називається частковою границею послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ ε– окіл точки a містить безліч членів послідовності (a_n). Таке означення часткової границі послідовності використано, наприклад, у підручнику [2] і допускає просту геометричну інтерпретацію.

Аналізуючи підходи до викладу цього матеріалу в різних поширених на Україні підручниках з математичного аналізу, зазначимо, що часткові границі, верхня та нижня границя послідовності поступово входили до навчальних програм й відповідних підручників математичних спеціальностей університетів на межі 19-го та 20-го століть. Так, у підручнику з диференціального та інтегрального числення видатного українського математика Г.Ф. Вороного [3], виданому у 1914 р., ці поняття відсутні, а у підручнику з математичного аналізу бельгійського математика Валле-Пуссена (український переклад французького видання 1926 р. [4]) вони є. Що до сучасного стану, ґрунтовно викладені ці питання у базовому підручнику для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають дисципліну "Математичний аналіз", [5] та у навчальному посібнику для студентів педагогічних вузів [6]. В останньому, зокрема, подається історична довідка, що позначення нижньої та верхньої границь послідовності (a_n) – $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ і $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ були введені німецькими математиками П. Дюбуа-Реймоном (1831-1889) та А. Прингсхеймом (1850-1941).

У цій статті викладена одна з методик вивчення теми "Часткові границі. Верхня та нижня границі послідовності" в нормативному курсі математичного аналізу для студентів-математиків на основі систематичного використання понять скінченної та нескінченної множини.

Ця методика може бути також використана у курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, що, на нашу думку, сприятиме формуванню компетентності майбутніх фахівців у галузі математики.

2. Точка скупчення послідовності

Нехай (a_n) – послідовність дійсних чисел.

Означення 1. Число a називається точкою скупчення послідовності (a_n), якщо для довільного додатного числа ε ε-окіл точки a містить безліч членів послідовності (a_n). Символ $-\infty\ (+\infty)$ називається точкою скупчення послідовності (a_n), якщо для довільного числа c проміжок $(-\infty, c)\ \big((c, +\infty)\big)$ містить безліч членів послідовності (a_n).

На *рис. 1, 2, 3* наведена геометрична інтерпретація точки скупчення послідовності (a_n).

Рис. 1. *a – точка скупчення послідовності $(a_n) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ містить безліч членів послідовності (a_n)*

Рис. 2. *Символ $-\infty$ – точка скупчення послідовності $(a_n) \Leftrightarrow \forall c\in R$ інтервал $(-\infty, c)$ містить безліч членів послідовності (a_n)*

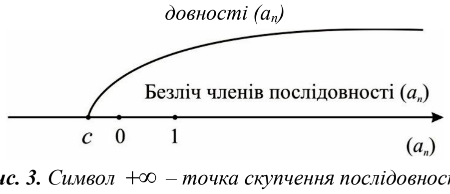

Рис. 3. *Символ $+\infty$ – точка скупчення послідовності $(a_n) \Leftrightarrow \forall c\in R$ інтервал $(c,+\infty)$ містить безліч членів послідовності (a_n)*

Зауваження 1. Символ $-\infty\ (+\infty)$ є точкою скупчення послідовності (a_n) тоді й тільки тоді, коли послідовність (a_n) необмежена знизу (зверху).

Множину всіх точок скупчення послідовності (a_n) позначимо через A.

Приклад 1. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = a\in R$.Тоді $A=\{a\}$– множина всіх точок скупчення послідовності (a_n). Дійсно, із означення границі послідовності випливає, що $\forall\varepsilon>0$ інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ містить безліч членів послідовності (a_n), і тому $a\in A$. Збіжна послідовність обмежена, а тому $-\infty\notin A$, $+\infty\notin A$. Далі, $\forall b\in R, b\neq a$ покладемо $\varepsilon=\frac{1}{2}|b-a|>0$. Тоді ε–околи точок a та b не перетинаються, внаслідок чого ε–окіл точки b містить не більше ніж скінченну кількість членів послідовності (a_n). Отже, $b\notin A$. Рівність $A=\{a\}$ доведена.

Приклад 2. Знайдемо множину A точок скупчення послідовності $\left(a_n=(-1)^{n-1}\right)$. Для довільного $\varepsilon>0$ множина $\{n\in N \mid |a_n-(-1)|<\varepsilon\}=\{2,4,6,\ldots\}$ нескінченна. Тому $-1\in A$. Аналогічно, для довільного $\varepsilon>0$ множина $\{n\in N \mid |a_n-1|<\varepsilon\}=\{1,3,5,\ldots\}$ нескінченна. Тому $1\in A$. Послідовність $\left((-1)^{n-1}\right)$ обмежена, а тому $-\infty\notin A$, $+\infty\notin A$. Для довільного числа $a\notin\{-1,1\}$ покладемо $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{|a-1|,|a+1|\}$. Тоді інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ не містить членів послідовності $\left((-1)^{n-1}\right)$, а тому $a\notin A$. Таким чином, $A=\{-1,1\}$.

Приклад 3. Множина всіх раціональних чисел Q злічення. Тому можна розташувати множину Q у вигляді послідовності (a_n). Множина A всіх точок скупчення цієї послідовності дорівнює $R\cup\{-\infty,+\infty\}$. Дійсно, послідовність (a_n) необмежена знизу і зверху, а тому $\{-\infty,+\infty\}\subset A$. Далі, $\forall a\in R, \forall\varepsilon>0$ множина $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\cap Q$ нескінченна, внаслідок чого $a\in A$. Таким чином, $A=R\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Теорема 1. Довільна послідовність дійсних чисел має хоча б одну точку скупчення.

Доведення. Нехай (a_n) – довільна послідовність дійсних чисел. Якщо ця послідовність необмежена, то хоча б один із символів $-\infty, +\infty$ буде точкою скупчення. Нехай тепер послідовність (a_n) обмежена. Це означає, що існує відрізок $[a, b]$ такий, що $(a_n)\subset[a, b]$. Розділимо відрізок $[a, b]$ навпіл точкою $c=\frac{a+b}{2}$. Тоді хоча б один із відрізків $[a, c]$, $[c, b]$ містить безліч членів послідовності (a_n). Позначимо такий відрізок через $[a_1, b_1]$. Розділимо відрізок $[a_1, b_1]$ навпіл точкою $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$. Тоді хоча б один із відрізків $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ містить безліч членів послідовності (a_n). Позначимо такий відрізок через $[a_2, b_2]$. Повторюючи ці міркування, отримаємо послідовність вкладених відрізків $\left([a_n, b_n]\right)$ таких, що кожний з цих відрізків містить безліч членів послідовності (a_n). Крім того, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$. Внаслідок леми про вкладені відрізки, існує єдина точка $x\in R$ така, що $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]=\{x\}$. Оскільки $b_n-a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in \mathrm{N}\ \forall n\geq N: [a_n, b_n]\subset(x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Але відрізок $[a_N, b_N]$ містить безліч членів послідовності (a_n), отже й інтервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Таким чином, x – точка скупчення послідовності. Теорема доведена.

3. Підпослідовності та їх властивості

Нехай $\left(m(k)\right)$ – зростаюча послідовність натуральних чисел, тобто

$$1 \le m(1) < m(2) < \ldots < m(k) < m(k+1) < \ldots$$

Зауважимо, що $\forall k \ge 1 : m(k) \ge k$ і тому $m(k) \to +\infty$.

Означення 2. Нехай (a_n) – послідовність дійсних чисел. Послідовність $\left(a_{m(k)}\right)$ називається підпослідовністю послідовності (a_n).

Приклади

4. Послідовність є підпослідовністю самої себе. Дійсно, при $m(k) = k,\ k \ge 1$ маємо рівність $\left(a_{m(k)}\right) = \left(a_k\right)$.

5. Послідовності $\left(a_{2k}\right), \left(a_{2k-1}\right), \left(a_{k!}\right), \left(a_{2^k}\right)$ – підпослідовності послідовності (a_n).

Відмітимо дві наступні властивості підпослідовностей.

Властивість 1. Довільна підпослідовність обмеженої послідовності обмежена.

Доведення. Нехай $\left(a_{m(k)}\right)$ – підпослідовність послідовності (a_n). Тоді $\left\{a_{m(k)} \mid k \in N\right\} \subset \left\{a_n \mid n \in N\right\}$, а множина $\left\{a_n \mid n \in N\right\}$ обмежена, оскільки послідовність (a_n) обмежена. Тому і множина $\left\{a_{m(k)} \mid k \in N\right\}$ обмежена, що означає обмеженість підпослідовності $\left(a_{m(k)}\right)$. Властивість доведена.

Властивість 2. Якщо послідовність (a_n) має границю $a \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, то будь-яка її підпослідовність $\left(a_{m(k)}\right)$ також має границю a.

Доведення. Для визначеності припустимо, що $a \in R$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$

$$\left\{m(k) \mid (k \in N) \wedge \left(\left|a_{m(k)} - a\right| \ge \varepsilon\right)\right\} \subset \left\{n \in N \mid \left|a_n - a\right| \ge \varepsilon\right\} \text{ –}$$

скінченна множина, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Множини $\left\{m(k) \mid (k \in N) \wedge \left(\left|a_{m(k)} - a\right| \ge \varepsilon\right)\right\}$ і $\left\{k \in N \mid \left|a_{m(k)} - a\right| \ge \varepsilon\right\}$ рівнопотужні, а тому й множина $\left\{k \in N \mid \left|a_{m(k)} - a\right| \ge \varepsilon\right\}$ скінченна, звідки випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m(k)} = a$. Властивість доведена.

4. Часткові границі. Теорема про характеризацію часткової границі

Означення 3. Число або символ $a \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ називається частковою границею послідовності (a_n), якщо існує підпослідовність $\left(a_{m(k)}\right)$, така, що $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m(k)} = a$.

Приклад 6. Знайдемо множину A часткових границь послідовності $\left(a_n\right) = \left(\left(-1\right)^{n-1}\right)$. Оскільки

$$a_{2k-1} = 1 \to 1,\ k \to \infty \text{ і } a_{2k} = -1 \to -1,\ k \to \infty,$$

то –1 і 1 – часткові границі послідовності (a_n), тобто $1, -1 \in A$. Нехай $a \ne 1, a \ne -1$. Покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left(|a-1|, |a+1|\right) > 0$. Тоді $\left\{n \in N \mid |a_n - a| < \varepsilon\right\} = \varphi$ і тому $a \notin A$. Отже, шукана множина часткових границь дорівнює $\{-1, 1\}$.

Теорема 3 (про характеризацію часткової границі). Число або символ $a \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ є частковою границею послідовності (a_n) тоді й тільки тоді, коли a – точка скупчення послідовності (a_n).

Доведення проведемо для випадку $a \in R$.

Необхідність. Нехай a – часткова границя послідовності (a_n). За означенням часткової границі, існує підпослідовність $\left(a_{m(k)}\right)$ послідовності (a_n) така, що $a_{m(k)} \to a,\ k \to \infty$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ містить безліч членів підпослідовності $\left(a_{m(k)}\right)$, а, отже, й безліч членів послідовності (a_n). Таким чином, a – точка скупчення послідовності (a_n).

Достатність. Нехай a – точка скупчення послідовності (a_n). Для $\varepsilon = 1$ інтервал $(a-1, a+1)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Тому існує $m(1) \in N$ таке, що $a_{m(1)} \in (a-1, a+1)$. Далі, для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ інтервал $\left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Тому існує натуральне число $m(2) > m(1)$ таке, що $a_{m(2)} \in \left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$ і т.д. На k-тому кроці для $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ існує натуральне число $m(k) > m(k-1)$ таке, що $a_{m(k)} \in \left(a - \dfrac{1}{k}, a + \dfrac{1}{k}\right),\ k \ge 2.$ У результаті отримаємо підпослідовність $\left(a_{m(k)}\right)$ послідовності (a_n) таку, що

$$0 \le \left|a_{m(k)} - a\right| < \frac{1}{k},\ k \ge 1.$$

За теоремою про три послідовності, $\lim\limits_{k\to\infty}\left|a_{m(k)} - a\right| = 0$, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} a_{m(k)} = a$. Отже, число a – часткова границя послідовності (a_n). Теорема доведена.

З теореми 2 та теореми 3 випливає

Теорема 4 (Больцано–Вейєрштрасса). Довільна обмежена послідовність дійсних чисел містить підпослідовність, збіжну до дійсного числа.

5. Нижня та верхня границі послідовності

Нехай (a_n) обмежена послідовність дійсних чисел.

Означення 4. Число a називається нижньою границею обмеженої послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon > 0$: інтервал $(-\infty, a - \varepsilon)$ містить не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n), а інтервал $(-\infty, a + \varepsilon)$ містить безліч членів цієї послідовності.

Позначення: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$.

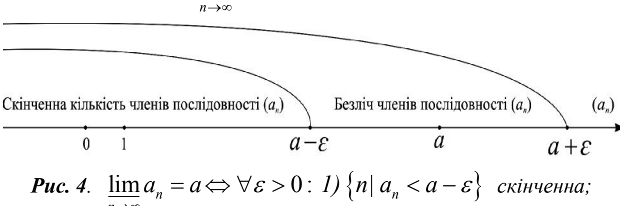

Рис. 4. *$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$: 1) $\{n \mid a_n < a - \varepsilon\}$ скінченна;*

2) $\{n \mid a_n < a + \varepsilon\}$ нескінченна

Доведемо, що довільна обмежена послідовність має нижню границю, яка є найменшою з її часткових границь.

Дійсно, нехай A – множина всіх часткових границь обмеженої послідовності (a_n). Внаслідок теореми Больцано-Вейєрштрасса, множина A непорожня. Обмеженість цієї множини випливає із обмеженості послідовності (a_n). За теоремою про існування точних меж, існує точна нижня межа множини A $\alpha := \inf A$. Доведемо, що число α є нижньою границею послідовності (a_n).

Нехай ε – довільне додатне число. Інтервал $\left(-\infty, \alpha-\varepsilon\right)$ не може містити безліч членів послідовності (a_n). Проведемо міркування від супротивного. Якщо інтервал $\left(-\infty, \alpha-\varepsilon\right)$ містить безліч членів послідовності (a_n), то існує підпослідовність $\left(a_{m(k)}\right)\subset\left(-\infty,\alpha-\varepsilon\right)$. Ця підпослідовність обмежена і на підставі теореми Больцано-Вейєрштрасса містить збіжну підпослідовність $\left(a_{m(k(j))}\right)$, $a_{m(k(j))}\to\gamma$. Таким чином, число γ є частковою границею послідовності (a_n). Але $a_{m(k(j))}<\alpha-\varepsilon,\ j\ge 1$. Після переходу у цій нерівності до границі при $j\to\infty$ отримаємо нерівність $\gamma\le\alpha-\varepsilon.$ Суперечність з означенням точної нижньої межі множини A. Отже, інтервал $\left(-\infty, \alpha-\varepsilon\right)$ містить не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n).

Інтервал $\left(-\infty, \alpha+\varepsilon\right)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Дійсно, за означенням точної нижньої межі, існує часткова границя $\gamma_1\in A$, така, що $\alpha\le\gamma_1<\alpha+\varepsilon.$

Покладемо $\delta=\alpha+\varepsilon-\gamma_1>0.$ Тоді множина $\left\{n|a_n\in\left(\gamma_1-\delta,\gamma_1+\delta\right)\right\}$ нескінченна. Але

$$\left\{n|a_n\in\left(\gamma_1-\delta,\gamma_1+\delta\right)\right\}\subset\ \left\{n\,|\,a_n<\alpha+\varepsilon\right\}$$

і тому інтервал $\left(-\infty, \alpha+\varepsilon\right)$ містить безліч членів послідовності (a_n). Отже, $\alpha=\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

Крім того, для довільного $\varepsilon>0$ множина

$$\left\{n|a_n\in\left[\alpha-\varepsilon,\,\alpha+\varepsilon\right)\right\}=\left\{n|a_n\in\left(-\infty,\,\alpha+\varepsilon\right)\right\}\setminus\left\{n|a_n\in\left(-\infty,\,\alpha-\varepsilon\right)\right\}$$

нескінченна як різниця нескінченної і скінченної множини. Отже, нижня границя α є частковою границею. Таким чином, для обмеженої послідовності (a_n) нижня границя існує і дорівнює найменшій частковій границі: $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\min A.$

Означення 5. Число a називається верхньою границею обмеженої послідовності (a_n), якщо для довільного $\varepsilon>0$: інтервал $\left(a+\varepsilon,+\infty\right)$ містить не більш ніж скінченне число членів послідовності (a_n), а інтервал $\left(a-\varepsilon,+\infty\right)$ містить безліч членів цієї послідовності.

Позначення: $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=a.$

Як і у випадку нижньої границі, доводиться, що довільна обмежена послідовність має верхню границю, яка є найбільшою з часткових границь: $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\max A.$

Для необмежених послідовностей нижня та верхня границі визначаються наступним чином.

Означення 6. Нехай (a_n) – довільна необмежена послідовність дійсних чисел, A – множина всіх її часткових границь.

Для послідовності (a_n), необмеженої знизу і обмеженої зверху, покладемо $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=-\infty.$ Якщо при цьому $A=\left\{-\infty\right\}$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=-\infty.$ У випадку $A\ne\left\{-\infty\right\}$ покладемо $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=\max\left(A\setminus\left\{-\infty\right\}\right).$

Для послідовності (a_n), обмеженої знизу і необмеженої зверху, покладемо $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=+\infty.$ Якщо при цьому $A=\left\{+\infty\right\}$, то $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=+\infty.$ У випадку $A\ne\left\{+\infty\right\}$ покладемо $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=\min\left(A\setminus\left\{+\infty\right\}\right).$

Нарешті, для необмеженої знизу і необмеженої зверху послідовності (a_n) покладають $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=-\infty,\ \ \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n:=+\infty.$

Зауваження 2. Як неважко переконатися, для необмеженої знизу і обмеженої зверху послідовності (a_n) у випадку $A\ne\left\{-\infty\right\}$ числова множина $A\setminus\left\{-\infty\right\}$ має найбільший елемент, який задовольняє означення 5 верхньої границі. Аналогічне зауваження має місце для нижньої границі послідовності.

Приклади

7. Нехай послідовність (a_n) має границю $\lim_{n\to\infty}a_n=a\in R\cup\left\{-\infty,+\infty\right\}.$ Тоді, внаслідок прикладу 1, $A=\left\{a\right\}$ і тому $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\ \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=a.$

8. Послідовність $\left(a_n\right)=\left(\left(-1\right)^{n-1}\right)$ (приклад 6) має множину часткових границь $A=\left\{-1,1\right\}.$ Тому $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\min A=-1,\ \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\max A=1.$

9. Нехай множина раціональних чисел Q подана у вигляді послідовності (a_n). Ця послідовність необмежена як знизу, так і зверху, а тому $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=-\infty,\ \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=+\infty.$

Зауваження 3. Як випливає з означень 4 – 6, нижня та верхня границя довільної послідовності є частковими границями цієї послідовності.

Вправа 1. Нехай A – множина часткових границь послідовності (a_n), Послідовність $\left(c_n\right)\subset A$ і A_1 – множина часткових границь послідовності (c_n). Довести, що $A_1\subset A.$

Список використаних джерел:

1. Курченко О.О., Рабець К.В. Границя послідовності мовою скінченності // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова, серія 3. – 2007. – № 3. – С. 47-53.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1. – М.: Наука. Главная редакция физико-матем. литературы, 1982. – 646 с.
3. Вороной Г.Ф. Дифференциальное и интегральное исчисление. – К.: Книгоиздательство И.И. Самоненко, 1914. – 604 с.
4. Шарль-Жан де ла Валле-Пуссен. Курс аналізу нескінченно малих. Том 1. – Харків: Державне науково-технічне видавництво України, 1938. – 330 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1. – К.: Либідь. – 1993. – 320 с.
6. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Границя і неперервність функції. – К.: УДПУ ім. М.П. Драгоманова, 1997. – 96 с.

In this article is described the method of studying the topic "Partial limits" in the normative course of mathematical analysis for mathematicians. The essence of the proposed method is the systematic using the notion of infinite and finite sets.

Key words: partial limits, top and bottom limits of sequence, point of accumulation, finite and infinite sets.

Отримано: 27.04.2008