Таблиця 2

***Гарантії екологічних прав громадян***


**Обов'язки громадян у галузі екології**

Загальні обов'язки громадян, передбачені Законом України "Про охорону навколишнього природного середовища":

– берегти природу, охороняти, раціонально використовувати її багатства;
– здійснювати діяльність із додержанням вимог екологічної безпеки, екологічних нормативів і лімітів природокористування;
– не порушувати екологічні права і законні інтереси інших суб'єктів;
– вносити плату за спеціальне природокористування;
– сплачувати штрафи за екологічні порушення.

Таким чином, впровадження еколого-правових знань буде сприяти:

– розширенню світоглядних орієнтирів;
– вихованню в учнів відповідальності за свою діяльність;
– розширенню змісту екологічних знань.

**Висновки.** Таким чином, за допомогою правових знань, які необхідно ввести в курс фізики, буде закладатися фундамент нової системи обов'язкових екологічних знань з фізики, викристалізовуватиметься кардинально нове бачення екологічних проблем країни та виникнуть додаткові сприятливі умови для формування екологічно активної позиції підростаючого покоління.

Перспективи роботи в цьому напрямку полягають не тільки у перегляді усталеної суми екологічних знань, але й у виробленні нових методів впровадження цих знань та, можливо, збільшення екологічного компоненту в шкільному курсі фізики.

**Список використаних джерел:**

1. *Доступ* до правосуддя з питань довкілля. — Львів, 2000. — С.194-195.
2. *Екологічне* право в малюнках і схемах для всіх. — Харків, 2002. — С.13.
3. *Екологічне* право України. — К., 2000. — С.31-32.
4. *Екологічне* право України (збірник нормативних актів) зі змінами і доповненнями станом на 1 березня 2000 р. — К., 2000. — С. 31.
5. *Національна* Доктрина розвитку освіти України у XXI столітті // Освіта України. — 2002. — №16. — С.3-9.

The article deals with ecological problems limited by the physics school course. The author takes pains over extending the content of the ecological knowledge which the physics subject pays attention traditionally. He recommends to introduce the sum of the ecological-legal knowledge in the physics school course.

**Key words:** safe environment, the safe environment stability, the safe environment quality, the safe environment favourableness, ecological information, ecological rights, ecological duties, Ministry of health care of Ukraine, Ministry of ecology and natural resources of Ukraine, organs of management and control in industry of ecology, guarantee of ecological human rights.

*Отримано: 19.04.2005.*

УДК 53(07):517.26

**О.А.Марченко, Ю.П.Мінаєв**

*Запорізький національний університет*

## ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЯДУ ТЕЙЛОРА ПРИ ВИВЧЕННІ ПОГЛИБЛЕНОГО КУРСУ ФІЗИКИ

У статті розглянута можливість застосування ряду Тейлора у методиці навчання фізики в умовах старшої школи фізико-математичного профілю.

**Ключові слова:** ряд Тейлора, поглиблений курс фізики, профільне навчання.

Ця стаття є логічним продовженням однієї з наших попередніх публікацій, де знайомство учнів з рядом Тейлора пов'язувалося із загальною проблемою розвитку критичного мислення в учнів старшої профільної школи [1]. Йшлося, звичайно, про школярів, які обрали фізико-математичний профіль навчання.

У відповідності до реформи загальної середньої освіти вже за декілька років у 10-12 класах має бути впроваджене профільне навчання. Безперечно актуальним у цих умовах є створення відповідного дидактичного забезпечення поглибленого курсу фізики. Потребує перегляду сукупність знань, яка пропонується учням для засвоєння. Важливо зокрема виокремити ті елементи, що можуть слугувати учням інструментарієм для активного вивчення фізики, для проведення власних навчальних досліджень.

Одним з таких елементів знань є ряд Тейлора (та його окремий випадок — ряд Маклорена). Нами експериментально було доведено, що при належній методиці учні навіть дев'ятих класів можуть без особливих ускладнень засвоювати цей матеріал та використовувати його під час аналізу різноманітних фізичних ситуацій. Методика знайомства школярів з рядом Тейлора, а також способи, що спрощують отримання розвинення функцій певних класів, зв'язки з геометричною прогресією, біномом Ньютона, інтегруванням та диференціюванням були розглянуті нами у попередній статті [1].

Зараз же ми зосередимо свою увагу на конкретних прикладах ознайомлення учнів із можливостями застосування ряду Тейлора безпосередньо при вивченні фізики.

***Задачі, що стають усними.*** Перевірку засвоєння учнями шкільного курсу фізики, особливо у фізико-математичних класах, рекомендовано МОН України проводити у письмовій формі [2] за "Збірником різнорівневих завдань для державної підсумкової атестації з фізики" [3]. Для складання іспиту на *високому* рівні школярі повинні вміти розв'язувати відповідні задачі, а для цього недостатньо знати теоретичний матеріал та певні алгоритми для розв'язування стандартних задач: завдання високого рівня *якісно* від них відрізняються. У статті [4] розповідалося про багаторічний позитивний досвід залучення учнів до *усного* розв'язування досить складних за звичайними мірками фізичних задач. Уміння застосовувати ряди Тейлора і Маклорена може значно розширити коло задач, що розв'язуються усно. Розглянемо конкретний приклад.

*Дві маленькі кульки масами 20 г та 30 г підвішені на закріплених в одній точці нитках однакової довжини. Кульку масою 20 г відводять на відстань, при якій нитки утворюють кут 10°, і відпускають. Визначте, на який кут відхиляться нитки від вертикалі після абсолютно непружного удару кульок* (№ 3.46 [3]).

Цю задачу можна швидко розв'язати усно, якщо врахувати малість початкового кута відхилення нитки з кулькою. Швидкість кульки, що відводили, безпосередньо перед ударом можна знайти за законом збереження енергії: $\frac{mv^2}{2} = mgl\left(1-\cos\varphi_0\right)$. При малих кутах $\cos\varphi_0 \approx 1-\frac{\varphi_0^2}{2}$ (два ненульових доданки ряду Маклорена). Отже, стає очевидним, що згадана швидкість $v$ пропорційна значенню максимального кута відхилення $\varphi_0$, а коефіцієнт пропорційності виражається через довжину нитки та прискорення вільного падіння, але не залежить від маси кульки. Після абсолютно непружного удару обидві кульки рухатимуться як одне тіло з сумарною масою, а початкова швидкість їхнього сумісного руху визначиться з закону збереження імпульсу і буде у 2,5 рази менша за швидкість першої кульки безпосередньо перед зіткненням, бо у стільки разів її маса менша за сумарну $\left(\frac{20+30}{20}\right)$. Враховуючи пропорційність між максимальним кутом відхилення (якщо він малий) і максимальною швидкістю (у положенні рівноваги), а також незалежність коефіцієнту пропорційності від маси тягарця, робимо висновок, що нитки відхиляться на кут 4° (=10°:2,5). Корисно розв'язати цю задачу в загальному вигляді без обмеження на малість початкового кута відхилення нитки, а потім порівняти відповідь з тією, яку ми отримали усно. Зауважимо, що зробити таке порівняння для кута в 10° за допомогою калькулятора можна без проблем. А ось аналітично довести, що кінцева формула для загального випадку

$$\left(\varphi = \arccos\left[1-\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\left(1-\cos\varphi_0\right)\right]\right)$$

переходить при малих кутах у формулу $\varphi = \frac{m_1}{m_1+m_2}\varphi_0$, для багатьох виявляється не такою вже і простою справою.

***Знаходження центра мас.*** Один з методів знаходження центра мас однорідного тіла пов'язаний з підрахунком зміни потенціальної енергії при повороті на малий кут навколо горизонтальної осі. Проілюструємо цей метод на прикладі знаходження положення центра мас тонкої однорідної пластини, що має форму половини круга.

Повернемо пластину на малий кут φ (див. *рис. 1*). Знайдемо зміну висоти її центра мас і відповідну зміну потенціальної енергії, вважаючи, що спочатку діаметр *AC* був горизонтальним. З міркувань симетрії центр мас повинен знаходитись на відрізку *OB*, і при повороті пластини він опуститься на $x_{ц.м.}\left(1-\cos\varphi\right)$, де $x_{ц.м.}$ — відстань від нього до точки *O*.

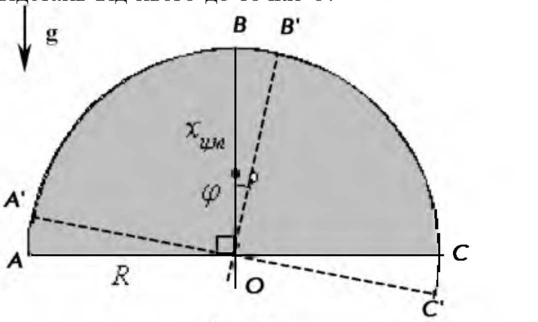


*Рис. 1*

Потенціальна енергія при цьому зменшиться на $\Delta E_p = mgx_{ц.м.}\left(1-\cos\varphi\right)$. Якщо скористатися тим фактом, що кут φ малий, та розвинути функцію cos φ у ряд Маклорена, обмежуючись двома першими ненульовими доданками, то можна записати:

$$\Delta E_p \approx mgx_{ц.м.}\frac{\varphi^2}{2}.$$

Тепер спробуємо знайти ту ж саму величину, виходячи з інших міркувань. Якщо уважно подивитися на рисунок, то, скориставшись однорідністю пластини, можна сказати, що пластина не рухалась, а лише сектор *OAA'* "перейшов" у сектор *OCC'*. Оскільки кут φ малий, то ми можемо вважати названі сектори трикутниками. Враховуючи, що центр мас трикутника знаходиться на перетині медіан, знаходимо, що цей "перехід" спричинив зміну висоти центра мас малого трикутника на $\frac{2}{3}R\varphi$. Отже, зміну потенціальної енергії можна записати так:

$$\Delta E_p \approx \frac{\varphi}{\pi}mg\frac{2}{3}R\varphi,$$

де $\frac{\varphi}{\pi}m$ — маса сектора, що відповідає куту φ.

Зрозуміло, що знайдені нами зміни потенціальних енергій повинні бути однаковими. Таким чином, $\frac{\varphi^2}{\pi}mg\frac{2}{3}R = mgx_{ц.м.}\frac{\varphi^2}{2}$, звідки $x_{ц.м.} = \frac{4R}{3\pi}$.

***Задачі, пов'язані з квазігармонічними коливаннями***. Як відомо, у тих випадках, коли коливання механічної системи біля положення рівноваги є гармонічними, потенціальну енергію можна представити у вигляді $Aq^2$, а кінетичну — у вигляді $B\dot{q}^2$, де $q$ — так звана узагальнена координата, яку для кожної конкретної ситуації обирають із міркувань зручності (це може бути, наприклад, кут повороту), а $\dot{q}$ — узагальнена швидкість. Після знаходження виразів для вказаних енергій можна записати закон збереження енергії і далі використовувати його в залежності від вимог задачі. Але знаходження цих виразів, як правило, потребує розвинення функцій у ряд Маклорена, оскільки частіше за все мова йде про квазігармонічні коливання, які наближаються до гармонічних при малих амплітудах. Розглянемо задачу, що у збірнику за редакцією О.Я.Савченка [5] віднесена до задач підвищеної складності.

*На нитках довжиною h, що знаходяться на відстані l одна від одної, висить невагомий стержень довжиною L >l з тягарцями масою m на кінцях. Стержень розташований горизонтально (див. рис. 2). Знайдіть максимальну кутову швидкість стержня, якщо його відпустили, повернувши перед тим на малий кут* $\varphi_0$ *у горизонтальній площині* [5, №3.1.14].

З умови задачі зрозуміло, що після виведення з положення рівноваги система буде здійснювати коливання. Як узагальнену координату зручно обрати кут $\varphi$, на який стержень повернений у горизонтальній площині відносно положення рівноваги.

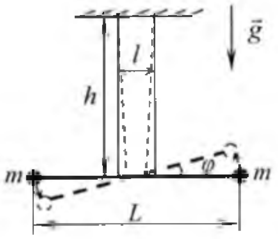

*Рис. 2*

У результаті повороту стержень, залишаючись горизонтальним, буде підніматись угору, його потенціальна енергія у гравітаційному полі Землі буде зростати зі збільшенням кута повороту. Знайдемо цю залежність.

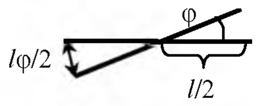

*Рис. 3*

З *рис. 3* ("вид зверху") видно, що при повороті на малий кут $\varphi$ відстань, на яку зміститься у горизонтальній площині кожна з точок закріплення ниток до стержня дорівнює $\dfrac{l\varphi}{2}$.

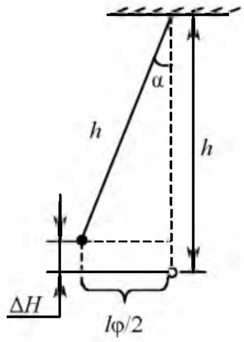

*Рис. 4*

З *рис. 4* ("вид з боку") можна визначити, що стержень при цьому підніметься вгору на висоту $\Delta H = h(1-\cos\alpha)$, де $\alpha$ — кут відхилення ниток від вертикалі. Цей кут можна також визначити за допомогою рисунка: $\sin\alpha = \dfrac{l\varphi}{2h}$.

Далі скористаємося розвиненням функцій синуса і косинуса у ряд Маклорена, враховуючи малість кута $\alpha$: $\sin\alpha \approx \alpha$, відповідно $\alpha \approx \dfrac{l\varphi}{2h}$; $\cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$, отже $\Delta H \approx h\dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{l^2}{8h}\varphi^2$. Тепер ми можемо записати у потрібному вигляді вираз для потенціальної енергії системи, вважаючи її нульовою в положенні рівноваги:

$$\Delta E_p \approx mg\frac{l^2}{4h}\varphi^2.$$

Тут враховано, що сумарна маса тягарців дорівнює $2m$.

Кінетична енергія без проблем виражається через кутову швидкість $\dot{\varphi}$: $E_k = 2m\dfrac{v^2}{2} = m\left(\dot{\varphi}\dfrac{L}{2}\right)^2$. Якщо у початковий момент часу стержень був повернений у горизонтальній площині на кут $\varphi_0$, то у відповідності до закону збереження енергії отримуємо:

$$mg\frac{l^2}{4h}\varphi^2 + m\frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2 = mg\frac{l^2}{4h}\varphi_0^2.$$

Отже, максимальна кутова швидкість $\dot{\varphi}_{\max}$ складатиме $\dot{\varphi}_{\max} = \dfrac{l}{L}\sqrt{\dfrac{g}{h}}\varphi_0$, оскільки при цьому $\varphi = 0$. Можна розглянути додаткове запитання: який буде період малих коливань стержня? Як відомо з теорії гармонічних коливань, максимальна узагальнена швидкість (у даному випадку $\dot{\varphi}_{\max}$) дорівнює добутку максимального значення координати (у даному випадку $\varphi_0$) та кругової частоти гармонічних коливань $\omega$ (що пов'язана з періодом $T$: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$). Отже, $\dot{\varphi}_{\max} = \dfrac{2\pi}{T}\varphi_0$. Звідки $T = 2\pi\dfrac{L}{l}\sqrt{\dfrac{h}{g}}$.

***Можливі ускладнення під час перевірки відповіді фізичної задачі на граничний випадок.*** Розглянемо задачу, яка полягає у знаходженні центра мас "газового стовпа", якщо молярна маса газу $\mu$, а висота "газового стовпа" — $H$. Крім того відомо, що газ знаходиться у земному полі тяжіння при температурі $T$ (див. *рис. 5*).

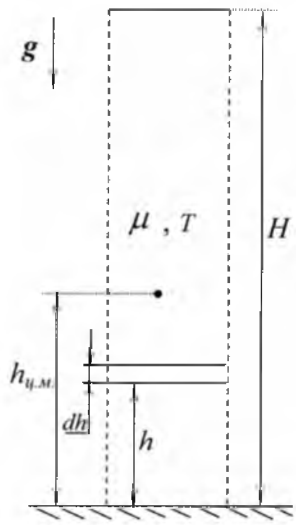

*Рис. 5*

Ця задача дещо виходить за межі традиційного шкільного курсу фізики, але, на нашу думку, у фізико-математичних класах, за умови вирішення проблеми математичної підтримки профільного курсу, розгляд подібних задач був би корисним.

Наведена задача розв'язується за допомогою означення центра мас:

$$h_{ц.м.} = \frac{\int h\,dm}{\int dm}, \qquad (1)$$

де $h$ — відстань від нульового рівня (поверхня землі) до шару газу завтовшки $dh$, маса якого $dm$, а інтегрування ведеться по всьому об'єму стовпа. Використовуючи відому залежність густини газу від висоти над поверхнею землі можна обчислити інтеграли, що входять в (1). Позначивши через $S$ площу поперечного перерізу стовпа, а через $\rho_0$ густину газу біля поверхні землі, маємо:

$$\int dm = \rho_0 S\int_0^H e^{-\frac{\mu g h}{RT}}dh = \frac{\rho_0 SRT}{\mu g}\left(1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}\right);$$

$$\int h\,dm = \rho_0 S\int_0^H h e^{-\frac{\mu g h}{RT}}dh =$$

$$= \rho_0 S\left[\left(-\frac{RT}{\mu g}he^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right)\Bigg|_0^H + \frac{RT}{\mu g}\int_0^H e^{-\frac{\mu g h}{RT}}dh\right] =$$

$$= \frac{\rho_0 SRT}{\mu g}\left[-He^{-\frac{\mu g H}{RT}} - \frac{RT}{\mu g}e^{-\frac{\mu g H}{RT}} + \frac{RT}{\mu g}\right].$$

Отже, центр мас "газового стовпа" можна знайти за формулою:

$$h_{ц.м.} = H\left[1 + \frac{RT}{\mu g H} - \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\mu g H}{RT}\right)}\right]. \qquad (2)$$

Отримавши таку досить громіздку кінцеву формулу, хотілося б перевірити її на очевидні граничні випадки. Зрозуміло, що при $T \to 0$ $\left(\dfrac{\mu g H}{RT} \to \infty\right)$ висота центра мас $h_{ц.м.}$ має прямувати до нуля, бо за такої умови всі молекули (в моделі ідеального газу) опиняться на землі. Якщо ж $T \to \infty$ $\left(\dfrac{\mu g H}{RT} \to 0\right)$ положення центру мас має бути на висоті $\dfrac{H}{2}$, оскільки у цьому випадку густина газу буде практично однаковою по всьому об'ємові стовпа.

Перевірку на граничний випадок для низьких температур наша кінцева формула (2) легко витримує. Дійсно, якщо $\dfrac{\mu g H}{RT} \to \infty$ (відповідно, $\dfrac{RT}{\mu g H} \to 0$ ), то $h_{ц.м.} \to 0$.

Тепер проаналізуємо її для випадку високих температур $\left(\frac{\mu g H}{RT} \to 0\right)$. Скориставшись тим, що за малих $x$ $e^x \approx 1 + x$, отримуємо:

$$\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\mu g H}{RT}\right)} \approx \frac{1}{1 - 1 + \frac{\mu g H}{RT}} = \frac{RT}{\mu g H},$$

а висота центра мас у розглядуваному випадку

$$h_{ц.м.} \approx H\left[1 + \frac{RT}{\mu g H} - \frac{RT}{\mu g H}\right] = H.$$

Але ж такий результат не співпадає з тим, який ми очікували. Де ж помилка?

Виявляється, що використане нами наближення було надто грубим і необхідно врахувати ще один член розвинення, тобто скористатися формулою $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$. Тоді матимемо:

$$e^{-\frac{\mu g H}{RT}} \approx 1 - \frac{\mu g H}{RT} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu g H}{RT}\right)^2,$$

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}} \approx \frac{1}{\frac{\mu g H}{RT} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu g H}{RT}\right)^2} = \frac{RT}{\mu g H}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{\mu g H}{RT}}\right).$$

Тут доведеться ще раз скористатися розвиненням у ряд Маклорена: $\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x$,

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}} \approx \frac{RT}{\mu g H}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\mu g H}{RT}\right] = \frac{RT}{\mu g H} + \frac{1}{2}.$$

Підстановка у (2) дає:

$$h_{ц.м.} \approx H\left[1 + \frac{RT}{\mu g H} - \frac{RT}{\mu g H} - \frac{1}{2}\frac{\mu g H}{RT} \cdot \frac{RT}{\mu g H}\right] = \frac{H}{2},$$

як і повинно було бути.

Після отримання правильної відповіді постає питання: чи не можна було заздалегідь передбачити, що обмеження першими двома ненульовими членами розвинення у ряд Маклорена призведе до непорозуміння?

Дійсно, коли ми замість $\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\mu g H}{RT}\right)}$ підставляємо $\frac{RT}{\mu g H}$, а потім порівнюємо між собою дві великі (адже $RT >> \mu g H$) величини, одна з яких точно дорівнює $\frac{RT}{\mu g H}$, а інша — приблизно, то не має ніякої гарантії, що різниця між цими величинами буде набагато меншою за одиницю. Коли ми враховуємо ще один член розвинення, то знаходимо, що вказана різниця приблизно дорівнює за абсолютним значенням 0,5 (тобто того ж порядку, що і одиниця).

Отже, цей приклад яскраво ілюструє ускладнення, які можуть виникнути під час перевірки відповіді фізичної задачі на граничні випадки.

У цій статті ми продемонстрували можливі застосування ряду Маклорена (як окремого випадку ряду Тейлора) у методиці навчання фізики в умовах старшої школи фізико-математичного профілю. Наші експериментальні дослідження свідчать, що цей матеріал є цілком доступним учням старших класів при належній організації математичної підтримки поглибленого курсу фізики. Така підтримка дозволяє учням краще розуміти фізику і відчувати власну силу, стикаючись з незнайомим задачами. А відчуття власної компетентності, власних можливостей є, як відомо, важливою спонукою (чинником) будь-якої діяльності й характеризує її *внутрішню* мотивацію [6].

Цю статтю ми розглядаємо як черговий крок у створенні навчального посібника для математичної підтримки поглибленого курсу фізики [7]. На черзі — методика ознайомлення старшокласників із криволінійними інтегралами, які потрібні у поглибленому курсі фізики вже під час вивчення механіки (принаймні для коректного введення поняття роботи).

Зазначимо наприкінці, що організація математичної підтримки поглибленого курсу фізики грає виключно важливу роль у залученні учнів до навчально-дослідної роботи у фізико-технічних гуртках Малої академії наук.

**Список використаних джерел:**

1. *Марченко О.А., Мінаєв Ю.П.* Знайомство з рядом Тейлора і розвиток критичного мислення // Наукові записки. — Випуск 60. Ч.2. — Серія: Педагогічні науки. — Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка. — 2005. — С.77-84.
2. *Державна* підсумкова атестація в загальноосвітній навчальних закладах у 2004-2005 навчальному році. Фізика, 11 клас // Фізика та астрономія в школі. — 2005. — №1. — С.2-4.
3. *Збірник* різнорівневих завдань для державної підсумкової атестації з фізики / За ред. І.М.Гельфгата. — Харків: Гімназія, 2002 — 104 с.
4. *Марченко О.А., Мінаєв Ю.П.* Усні задачі високого рівня з механіки // Фізика та астрономія в школі. — 2005. — №1. — С.36-41.
5. *Задачи* по физике. Учеб. пособие / И.И.Воробьев, П.И.Зубков, Г.А.Кутузова и др.; Под ред. О.Я.Савченко. — М.: Наука, 1988. — 416 с.
6. *Занюк С.С.* Психологія мотивації: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2002. — 304 с.
7. *Мінаєв Ю.П., Кенєва І.П., Андрєєв А.М.* Проблема навчального посібника для математичної підтримки поглибленого курсу фізики // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка. — №6. — 2002. — С.102-107.

Possibility to use a Taylor series in didactics of physics in conditions of physics-mathematical classes is considered in the article.

**Key words**: a Taylor series, physics-mathematical classes, profile teaching of physics.

*Отримано: 7.05.2005.*