

Андрій БОЙКО¹, Оксана ГЕТМАНЮК², Мирон ГРОМЯК³

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
e-mail: ¹boyko.a1@tnpu.edu.ua, ²getmanuyk_oksana@tnpu.edu.ua, ³ghromyak@tnpu.edu.ua
ORCID: ¹0000-0002-1634-3775, ²0009-0007-5552-5516, ³0000-0001-8469-991X

ВИКОРИСТАННЯ GEOGEBRA У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОГО ЦИКЛУ

Анотація. У статті досліджується доцільність застосування динамічного математичного середовища GeoGebra для оптимізації викладання фундаментальних дисциплін математичного циклу в закладах вищої освіти.

У даній роботі описано шляхи подолання складнощів у засвоєнні студентами фізико-математичних спеціальностей абстрактних і багатовимірних концепцій, що є основою курсів лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу засобами ІКТ. Використання ІКТ, зокрема GeoGebra, є критично важливим для глибокої візуалізації таких понять, як лінійні перетворення, криві першого та другого порядку, поверхні першого та другого порядку, застосування диференціального та інтегрального числення.

У процесі проведення формульованого педагогічного експерименту на базі фізико-математичного факультету, здобувачі освіти вивчали вищезгадані дисципліни з використанням GeoGebra. Ключові результати засвідчили статистично значуще підвищення рівня засвоєння матеріалу, суттєве покращення навичок розв'язання задач підвищеної складності та ефективний розвиток просторового мислення. Отримані дані підтверджують, що систематична інтеграція GeoGebra сприяє формуванню у майбутніх вчителів математики глибокого розуміння математичних дисциплін та універсальних інструментальних компетенцій.

Ключові слова: GeoGebra, динамічне математичне середовище, Лінійна алгебра, Аналітична геометрія, Математичний аналіз, візуалізація, професійні компетенції, формульований педагогічний експеримент, ІКТ.

Актуальність теми. Сучасна освітня парадигма вимагає від викладача не лише передачі знань, а й формування у здобувачів освіти навичок критичного мислення, вміння працювати з даними та вирішувати прикладні задачі. Дисципліни математичного циклу є основою для інженерних, природничих та економічних спеціальностей. Однак їх викладання часто нашкоджується на проблему абстрактності матеріалу та низької мотивації студентів.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) є одним із найефективніших шляхів подолання цих бар'єрів. Серед численних програмних засобів, особливе місце займає GeoGebra – безкоштовне, багатофункціональне динамічне математичне середовище, що поєднує можливості геометрії, алгебри, статистики та аналізу. GeoGebra дозволяє миттєво візуалізувати математичні співвідношення, перетворюючи статичні зображення на динамічні моделі.

Метою статті є теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка ефективності використання GeoGebra як інструменту для підвищення якості засвоєння навчального матеріалу дисциплін математичного циклу.

Для досягнення мети поставлено та вирішено наступні завдання: проаналізовано теоретичні засади застосування GeoGebra у викладанні математики; розроблено та апробувати комплекс навчальних завдань на базі GeoGebra для обраних тем; проведено педагогічний експеримент та здійснено кількісний і якісний аналіз його результатів; сформульовано методичні рекомендації щодо інтеграції GeoGebra в освітній процес.

Виклад основного матеріалу. Питання інтеграції ІКТ, зокрема GeoGebra, у математичну освіту активно досліджується як українськими, так і зарубіжними вченими. GeoGebra є динамічним математичним середовищем для різних рівнів освіти, у якому об'єднано різні розділи математики з електронними таблицями, графіками, а також статистику [1]. «Використання цього програмного забезпечення GeoGebra при навчанні математики дозволяє поєднати алгебраїчний та геометричний

підходи до вивчення матеріалу, сприяє формуванню просторового уявлення, а головне – дає можливість здійснювати динамічне моделювання та дослідження різних математичних об'єктів та процесів. Таким чином, GeoGebra виступає не лише як засіб візуалізації, а й як потужний інструмент дослідження» [7].

Лупаренко Лариса Анатоліївна стверджує, що: «використання програмного забезпечення GeoGebra у процесі підготовки майбутніх учителів математики забезпечує синтез графічного, табличного та аналітичного представлення інформації, що є необхідною передумовою для формування їхньої інформаційно-цифрової компетентності. Дидактичний потенціал GeoGebra реалізується через її мультифункціональність та здатність створювати динамічне освітнє середовище для моделювання, дослідження та розв'язування навчальних задач» [4].

В одній із її праць досліджується використання вищезгаданої платформи при вивченні аналітичної геометрії, у якій вказано що, «застосування програмного забезпечення GeoGebra при вивченні елементів аналітичної геометрії є ефективним засобом візуалізації геометричних образів, що дозволяє студентам швидше і глибше засвоювати їхні властивості» [3].

Семенихіна О.В. та Попельнюх І.О. у своїх дослідженнях прийшли до висновку: «GeoGebra є мультимедійним, багатофункціональним засобом, використання якого дозволяє поєднати в єдиний навчальний простір роботу з геометричним, алгебраїчним та аналітичним матеріалом. Застосування цього програмного забезпечення при вивченні математичних дисциплін сприяє візуалізації абстрактних понять, підвищує мотивацію студентів та формує їхні навички самостійного дослідження» [5].

GeoGebra актуальна у вивченні математичного аналізу та є популярною темою серед дослідників, оскільки це програмне забезпечення дозволяє візуалізувати абстрактні поняття (похідні, інтеграли, границі, диференціальні рівняння тощо) у динамічному режимі.

Українські науковці активно досліджують інтеграцію GeoGebra в методологію навчання матема-

тики у закладах вищої освіти, зосереджуючись на візуалізації та підвищенні розуміння складних тем матаналізу. Юнчик В.В. та Гриб'юк О.О. стверджують: «Завдяки своїй інтегративній природі, GeoGebra є потужним засобом для візуалізації та динамічного моделювання математичних об'єктів. Це особливо актуально при вивченні математичного аналізу, оскільки дозволяє студентам наочно досліджувати границі, неперервність, похідні та інтеграли функцій. Використання повзунків та динамічних точок допомагає миттєво бачити взаємозв'язок між алгебраїчним виразом функції та її графічним представленням, сприяючи формуванню концептуального розуміння складних понять» [8].

Науковці Т.В. Bedada та М.Ф. Machaba досліджують використання GeoGebra для досліджень з диференціального числення [10]. Праця Indriyatni S., Huda N. присвячена дослідженню ефективності інтеграції динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra у процес викладання та вивчення концепції об'ємів тіл обертання в курсі інтегрального числення. Автори ставлять за мету продемонструвати, як використання GeoGebra може покращити розуміння складних просторових концепцій і зробити процес навчання більш інтерактивним та наочним [11].

Проаналізувавши наукову літературу можна зробити висновок, що GeoGebra є потужним дидактичним інструментом при навчанні дисциплін математичного циклу. Дослідники наголошують, що вона сприяє візуалізації складних 3D-об'єктів та процесів, а також експериментальному підходу, коли студент може самостійно маніпулювати параметрами та спостерігати за змінами результату.

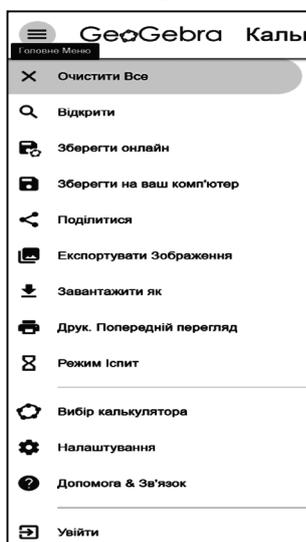


Рис. 1. Головне меню

Виведено окремо декілька "калькуляторів" для різних потреб (Графічний, 3D Калькулятор, Геометрія, СКА, Ймовірність, Науковий). На цьому ж рисунку, під головним меню, подано вікна «Алгебра», «Інструменти», «Таблиця» – ці вікна є головними в інтерфейсі GeoGebra. Вони дозволяють користувачам використовувати різні функції у своїх дослідженнях, проводити обчислення, створювати та маніпулювати геометричними об'єктами, вводити та обробляти великі набори даних і статистики, тощо. Рядок введення, який розташований у активному вікні «Алгебра», справа біля кнопки «Алгебра», дозволяє вводити ко-

манди та алгебраїчні вирази без використання графічних інструментів. Після натиснення біля нього, на кнопку «+» і «Допомога», відкриються усі математичні функції у GeoGebra (рисунк 3).

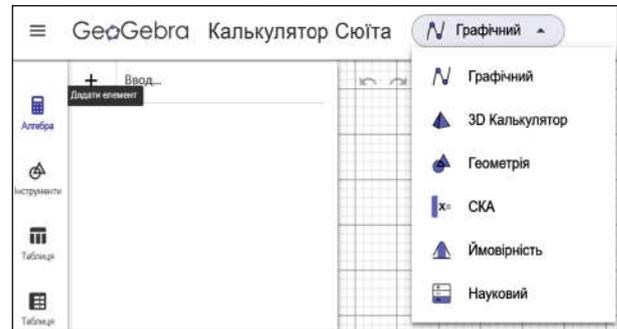


Рис. 2. Основні вікна GeoGebra

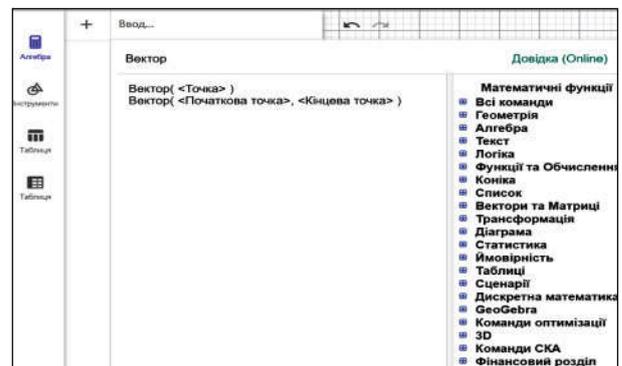


Рис. 3. Математичні функції

Нами розглянуто задачі з лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу, в яких продемонстровано використання GeoGebra при їх розв'язанні та проведено обґрунтування цього розв'язку.

Розглянемо конкретний приклад, на якому проаналізовано використання GeoGebra при розв'язуванні системи лінійних рівнянь (СЛР):

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + e - z = 1 \end{cases}$$

Розв'язок можна отримати, використавши функцію СКА (Система Комп'ютерної Алгебри), – вона наведена на *рисунку 1* та *рисунку 2*. Отримаємо розв'язок: $x = 1, y = 2, z = 3$ (*рис. 4*).

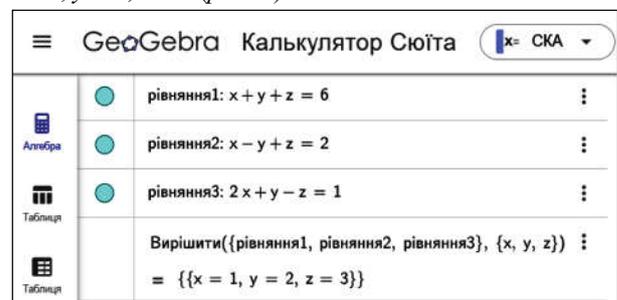


Рис. 4. Розв'язок СЛР через СКА

Послідовність дій у інтерфейсі наступна: 1) відкрити вікно «СКА»; 2) кожне рівняння потрібно ввести в окремий рядок; 3) виконати команду «Розв'язати». Синтаксис команди: *Вирішити* ({Список Рівнянь}, {Список Невідомих}), цю ж команду також можна

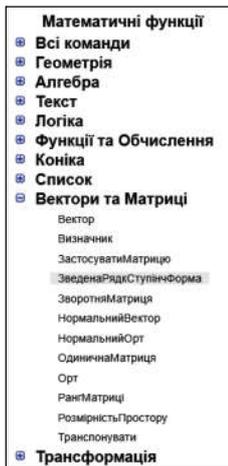


Рис. 5. Застосування функцій

1, 1, 6}, {1, -1, 1, 2}, {2, 1, -1, 1}}. У наступному рядку застосовуємо функцію «ЗведенаРядкСтупінчФорма» (рис. 5). В результаті отримуємо східчасту розширену матрицю, в якій відразу за методом Жордана-Гауса отримуюмо розв'язок

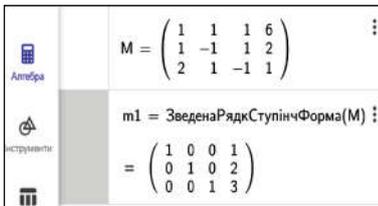


Рис. 6. Зведення СЛР до ступінчастого вигляду

зробити з допомогою GeoGebra використовуючи 3D «Калькулятор»: 1) вибираємо 3D «Калькулятор» (рис. 2); 2) у кожному рядку вводим окремо кожне рівняння, де результатом буде три площини, які перетинаються у одній точці; 3) знайдемо перетин цих трьох площин (об'єктів), як результат перетину двох площин (прямої) із третьою площиною – отримуємо точку A(1;2;3). Її координати і будуть нашим розв'язком системи трьох рівнянь із трьома невідомими. Зауважимо, що у GeoGebra можна шукати перетин тільки двох об'єктів, тому ми шукали координати точки двічі послідовно використовуючи перетин двох об'єктів (рис. 7).

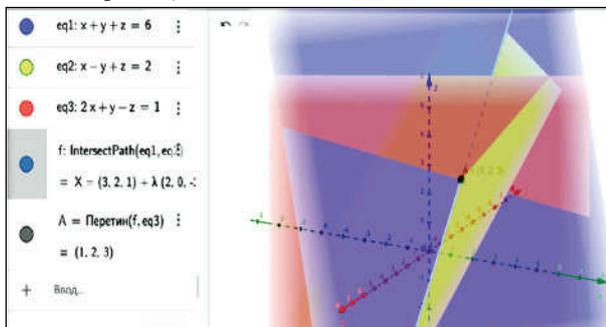


Рис. 7. Перетин трьох площин

З рисунка 7 можна зробити висновок про застосування GeoGebra при вивченні аналітичної геометрії. Тобто, з допомогою цього програмного засобу можна наочно вивчати розміщення будь-яких геометричних об'єктів, таких, як прямі на площині та в просторі,

ввести з клавіатури у четвертий рядок. 4) Натискаємо Enter, та отримуємо розв'язок.

Продемонструємо розв'язок цієї системи аналізуючи метод Жордана-Гауса. У GeoGebra є функції, які дозволяють робити різні перетворення над матрицями, а також над розширеними матрицями системи. Ці функції наведено на рис. 5, який є вихідним із рис. 3. Дану систему рівнянь можна звести до ступінчастого вигляду, та, використавши вищезгаданий метод, відразу знайти невідомі корені. Для цього у вікні «Алгебра» у рядку введення вводим нашу розширену матрицю у наступному синтаксисі: $M = \{\{1,$

$\{1, 1, 6\}, \{1, -1, 1, 2\}, \{2, 1, -1, 1\}\}$. У наступному рядку застосовуємо функцію «ЗведенаРядкСтупінчФорма» (рис. 5). В результаті отримуємо східчасту розширену матрицю, в якій відразу за методом Жордана-Гауса отримуюмо розв'язок

СЛР: $x = 1, y = 2, z = 3$ (рис. 6).

Проілюструємо ще цей розв'язок геометрично, а саме як перетин трьох площин. Це досить просто та зручно

взаємне розміщення площин та прямих в просторі, будь-яких більш складних кривих та поверхонь як на площині, так і в просторі. А з допомогою вбудованих функцій можна проводити глибокі дослідження відповідних об'єктів як з лінійної алгебри, так і з аналітичної геометрії. Це дає можливість студентам розвивати просторову уяву, критичне мислення та проявляти інтерес до відповідних дисциплін.

У нашій роботі також проведено дослідження щодо використання цієї платформи для розв'язування задач з математичного аналізу.

Для прикладу проведено дослідження на знаходження точок екстремуму функції однієї змінної:

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}.$$

Для цього нам потрібно скористатись «Графічним калькулятором» (рис. 2). У рядок введення вводим нашу функцію. Це досить просто зробити скориставшись допоміжною клавіатурою, яка вмонтована у інтерфейс інтерактивної платформи. У результаті ми зразу отримуємо графік функції. Далі, у цьому ж рядку, натискаємо кнопку «:» та вибираємо команду «Особливі точки» (див. рис. 8). Ми швидко та точно знайшли екстремальні точки заданої функції. У нашому випадку точка максимуму є точка C, а точка мінімуму – B. Отже, GeoGebra слугує як потужний інструмент, який дозволяє досліджувати функції будь-якої складності, що є невіддільною частиною математичного аналізу.

Розглянемо інший приклад з математичного аналізу. Нехай потрібно знайти площу фігури, яка обмежена графіками функцій

$$f(x) = x^2 \text{ та } g(x) = x + 2.$$

У цьому випадку наша задача зводиться до відшукування визначеного інтеграла. Продемонструємо розв'язок цієї задачі з допомогою GeoGebra: 1) вибираємо графічний калькулятор та вводим у окремі рядки наші задані функції; 2) знаходимо точки перетину кривих з допомогою команди *Перетин(f, g)*; 3) результатом будуть знайдені дві точки: A = (-1, 1) та B = (2, 4); 4) визначаємо межі інтегрування – це абсциси цих точок: $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$; 5) у новому рядку виконаємо команду: *Інтеграл Між(g, f, -1, 2)*, з допомогою якої ми обчислимо площу новоутвореної фігури, яка дорівнюватиме 4,5 квадратних одиниць (див. рис. 9).

Аналізуючи проведені вище нами дослідження, можна сміло стверджувати, що GeoGebra слугує як потужний інструмент, який дозволяє вирішувати широкий спектр задач з дисциплін математичного циклу.

Завдання такого типу були запропоновані студентам фізико-математичного факультету ТНПУ ім. В. Гнатюка. Для проведення експерименту було обрано дві паралельні групи студентів першого курсу. У контрольній групі проводилось традиційне навчання, тобто для демонстрації використовуються статичні малюнки, дошка, креслення від руки. А у експериментальній із інтеграцією GeoGebra. У цій групі студенти регулярно використовували 3D Калькулятор для Побудови площин та векторів, візуалізації взаємного розташування прямих і площин (паралельність, перетин), а також досліджували криві та поверхні другого порядку. За даними експерименту ми дійшли висновку, що досліджуване програмне середовище можна та потрібно використовувати при навчанні викладачами та студентами.

Висновки. Використання динамічного математичного середовища GeoGebra у процесі навчання дисциплін математичного циклу є ефективним дидактичним інструментом. Експериментально доведено, що GeoGebra сприяє підвищенню успішності, поглибленню розуміння абстрактних понять, розвитку просторового і критичного мислення у студентів.

Перспективи подальших досліджень вбачаються у розробці комплексних методик використання GeoGebra для навчання інших математичних дисциплін, а саме: диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії, дискретної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, нарисної геометрії.

Список використаних джерел:

1. Круковець Н.В. Актуальні питання використання GeoGebra у процесі викладання математики. *Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції*. Луцьк: ВНУ імені Лесі Українки, 2024. С. 51–53.
2. Кузьменко А.І. Використання GeoGebra у навчанні математики: сучасний підхід. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: Педагогіка*. 2019. Вип. 2. С. 136–142. URL: <https://tnpu.edu.ua/>
3. Лупаренко Л.А. Використання GeoGebra при вивченні елементів аналітичної геометрії студентами-математиками. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*. 2014. Вип. 15 (22). С. 136–140.
4. Лупаренко Л.А. Дидактичний потенціал GeoGebra як засобу формування інформаційно-цифрової компетентності майбутніх учителів математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2021. Т. 81. Вип. 1. С. 138–150.
5. Семенихіна О.В., Попельнюх І.О. Методичні аспекти використання GeoGebra у процесі вивчення математики в закладах вищої освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. 2016. Вип. 45. С. 136–140.
6. Семенихіна О.В., Череватова Л.С. Застосування GeoGebra у процесі підготовки майбутніх учителів математики до організації дистанційного навчання. *Наукові записки. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*. 2020. Ч. 2. С. 98–103.
7. Співаковський О.В., Кушнір В.М., Ломакіна В.В. Розробка та використання динамічних моделей засобами GeoGebra в умовах інноваційного освітнього середовища. *Інформаційно-комунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, перспективи*. 2018. С. 48–51. (Примітка: сторінки можуть варіюватися залежно від конкретного збірника конференції).

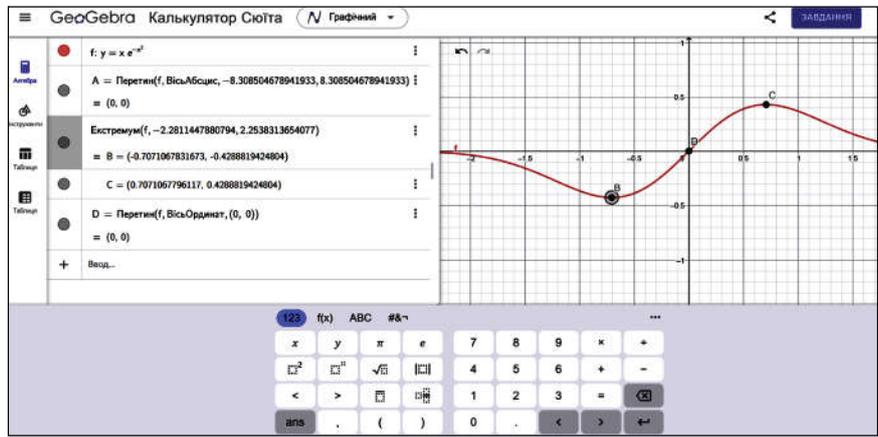


Рис. 8. Дослідження функції на екстремум

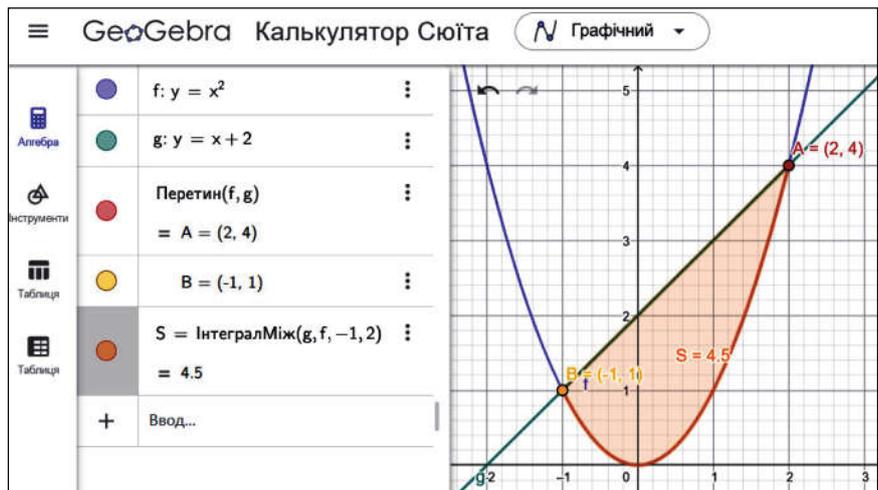


Рис. 9. Обчислення визначеного інтегралу

8. Юнчик В.В., Гриб'юк О.О., Новицька В.С., Вдович А.В. Особливості використання системи GeoGebra в процесі навчання курсу математики. *Інформаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, перспективи*. 2020. С. 138–143.
9. Dolić M., Beguš J. Application of GeoGebra in Teaching Selected Topics in Mathematics at the College Level. *Metodika*. 2019. Vol. 20, no. 2. P. 296–308.
10. Bedada T.B., Machaba M.F. Investigation of student's perception learning calculus with GeoGebra and cycle model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 2022. Vol. 18, no. 10. Article em2164. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/12443>
11. Indriyatni S., Huda N. Penggunaan GeoGebra untuk Menentukan Volume Benda Putar pada Kalkulus Integral. *Indonesian Journal of Education & Mathematical Science*. 2024. Vol. 5, no. 1. P. 58–63. DOI: <https://doi.org/10.30596/ijems.v5i1.18086>
12. Yunchyk V. Atypical mathematics lessons at school by means of GeoGebra. *East – West Conference on Mathematics Education (EWCOME 2016) at the University of Social Sciences and Humanities, Warsaw, Poland*, 2016.

Andrii BOIKO, Oksana HETMANIUK, Myron HRONIAK
 Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University

THE USE OF GEOGEBRA IN TEACHING MATHEMATICAL CYCLE DISCIPLINES

Abstract. The article examines the feasibility of using the dynamic mathematics environment GeoGebra to optimize the teaching of fundamental mathematical-

cycle disciplines in higher education institutions. This study outlines ways to overcome the difficulties faced by students of physics–mathematics specializations in mastering abstract and multidimensional concepts that underpin courses in linear algebra, analytic geometry, and mathematical analysis through ICT tools. The use of ICT, particularly GeoGebra, is crucial for the deep visualization of such concepts as linear transformations, first- and second-order curves, first- and second-order surfaces, and the applications of differential and integral calculus. Within the framework of a formative pedagogical experiment conducted at a faculty of Physics and Mathematics, students studied the above-mentioned disciplines using GeoGebra. The key results demonstrated a statistically significant increase in the level of content mastery, substantial improvement in solving advanced-level problems, and an effective enhancement of spatial reasoning skills. The findings confirm that the systematic integration of GeoGebra supports the development of a deep understanding of mathematical disciplines and universal instrumental competencies in future mathematics teachers.

Key words: GeoGebra, dynamic mathematics environment, Linear Algebra, Analytical Geometry, Mathematical Analysis, visualization, professional competencies, formative pedagogical experiment, ICT.

References:

1. Krukovets N.V. Aktualni pytannia vykorystannia GeoGebra u protsesi vykladannia matematyky. *Materialy Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii*. Lutsk: VNU imeni Lesi Ukrainky, 2024. S. 51–53.
2. Kuzmenko A.I. Vykorystannia GeoGebra u navchanni matematyky: suchasnyi pidkhid. *Naukovi zapysky Ternopilskoho natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni Volodymyra Hnatiuka. Serii: Pedahohika*. 2019. Vyp. 2. S. 136–142. URL: <https://tnpu.edu.ua/>
3. Luparenko L.A. Vykorystannia GeoGebra pry vyvcheni elementiv analitychnoi heometrii studentamy-matematykamy. *Naukovi chasopys NPU imeni M.P. Drachomanova. Serii 2. Kompiuterno-orientovani systemy navchannia*. 2014. Vyp. 15 (22). S. 136–140.
4. Luparenko L.A. Dydaktychnyi potentsial GeoGebra yak zasobu formuvannia informatsiino-tsyfrovoi kompetentnosti maibutnikh uchyteliv matematyky. *Informatsiini tekhnologii i zasoby navchannia*. 2021. T. 81. Vyp. 1. S. 138–150.
5. Semenikhina O.V., Popelniukh I.O. Metodychni aspekty vykorystannia GeoGebra u protsesi vyvchennia matematyky v zakladakh vyshchoi osvity. *Suchasni informatsiini tekhnologii ta innovatsiini metodyky navchannia v pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*. 2016. Vyp. 45. S. 136–140.
6. Semenikhina O.V., Cherevatova L.S. Zastosuvannia GeoGebra u protsesi pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky do orhanizatsii dystantsiinoho navchannia. *Naukovi zapysky. Serii: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity*. 2020. Ch. 2. S. 98–103.
7. Spivakovskiy O.V., Kushnir V.M., Lomakina V.V. Rozrobka ta vykorystannia dynamichnykh modelei zasobamy GeoGebra v umovakh innovatsiinoho osvitnoho seredovyscha. *Informatsiino-komunikatsiini tekhnologii v suchasni osviti: dosvid, problemy, perspektivy*. 2018. S. 48–51.
8. Yunchyk V.V., Hrybiuk O.O., Novytska V.S., Vdovych A.V. Osoblyvosti vykorystannia systemy GeoGebra v protsesi navchannia kursu matematyky. *Informatsiini tekhnologii v suchasni osviti: dosvid, problemy, perspektivy*. 2020. S. 138–143.
9. Dolić M., Beguš J. Application of GeoGebra in Teaching Selected Topics in Mathematics at the College Level. *Metodika*. 2019. Vol. 20, no. 2. P. 296–308.
10. Bedada T.B., Machaba M.F. Investigation of student's perception learning calculus with GeoGebra and cycle model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 2022. Vol. 18, no. 10. Article em2164. DOI: <https://doi.org/10.29333/ejmste/12443>.
11. Indriyatni S., Huda N. Penggunaan GeoGebra untuk Menentukan Volume Benda Putar pada Kalkulus Integral. *Indonesian Journal of Education & Mathematical Science*. 2024. Vol. 5, no. 1. P. 58–63. DOI: <https://doi.org/10.30596/ijems.v5i1.18086>
12. Yunchyk V. Atypical mathematics lessons at school by means of GeoGebra. *East – West Conference on Mathematics Education (EWCOME 2016) at the University of Social Sciences and Humanities*, Warsaw, Poland, 2016.

От римано: 24.10.2025