

Ольга ШТОФЕЛЬ¹, Віктор ГОЛОВКО², Данило КОРОЛЕНКО³, Софія МАРКОВСЬКА⁴,
Юлія БОНДАРЕНКО⁵

^{1,4,5}Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

^{1,2,3}Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України

e-mail: ¹o.shtof@gmail.com, ²v_golovko@ukr.net, ³dankorlenko@gmail.com, ⁴markovska.sofia@ill.kpi.ua,
⁵yulia.b-fmf27@ill.kpi.ua;

ORCID: ¹0000-0003-0965-6340, ²0000-0002-2117-0864, ³0009-0008-8582-5904,

⁴0009-0000-2267-0222, ⁵0009-0008-6626-3483

ФОРМУВАННЯ МІЖДИСЦИПЛІНАРНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ СТУДЕНТІВ-ФІЗИКІВ ЧЕРЕЗ ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ

Анотація. Традиційні методи матеріалознавства часто виявляються недостатніми для точної та повної характеристики складних, масштабно-інваріантних структур природних і синтетичних об'єктів. Ця проблема ускладнює розуміння залежностей між структурними особливостями матеріалів та їхніми фізичними властивостями. Метою роботи є розробка та впровадження методики формування міждисциплінарних компетентностей студентів-фізиків шляхом інтеграції фрактального аналізу як потужного інструменту дослідження. Фрактальний підхід забезпечує новий інструментарій для виявлення глибинного порядку та закономірностей у складних, здавалося б, хаотичних структурах, що є критичним для сучасних досліджень матеріалів. Значимість полягає у наданні студентам-фізикам практичного досвіду застосування передових математичних методів для аналізу структурних компонент матеріалів, вивчення їхньої поведінки під дією різних факторів та прогнозування властивостей. Це не лише поглиблює їхні знання у матеріалознавстві, але й розвиває необхідні аналітичні та дослідницькі навички для міждисциплінарної наукової діяльності.

Ключові слова: фізика, математичний підхід, фрактальний аналіз, матеріалознавство, міждисциплінарні компетентності, масштабна інваріантність, структура матеріалів.

Постановка проблеми. Формування у студентів-фізиків міждисциплінарних компетентностей в сучасному світі вимагає нових підходів, методів дослідження і взаємодії їх із затребуваністю нашого часу. Так як наразі існує недостатня інтеграція сучасних міждисциплінарних методів дослідження, зокрема фрактального аналізу, у навчальний процес підготовки фахівців зі спеціальності Е5(104) Фізика та астрономія, особливо в контексті сучасного матеріалознавства та фізики твердого тіла, було запропоновано ввести методи фрактального аналізу у програми підготовки фахівців освітньої програми «Моделювання фізичних процесів» на фізико-математичному факультеті КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Аналіз застосування методу у дисциплінах закладів вищої освіти за спеціальністю. Застосування методу фрактального у навчальних дисциплінах спеціальності Е5(104) Фізика та астрономія не є популярним [1-3]. Проте, навчання фрактальному аналізу розвиває у студентів-фізиків аналітичне мислення, навички комп'ютерного моделювання та обробки експериментальних даних (зокрема, цифрових зображень мікроструктур) – ключові вимоги сучасного ринку праці та наукової діяльності. Фрактальна розмірність є кількісною характеристикою, що пов'язує мікроструктуру матеріалу (наприклад, пористість, шорсткість, розподіл фаз) з його фізичними та механічними властивостями. Включення цього методу дозволяє студентам глибше зрозуміти принцип «структура-властивість» та сформулювати затребувані сучасністю компетентності [4].

Мета дослідження є комплексною і полягає у методичному обґрунтуванні та експериментальній апробації ефективності інтеграції фрактального аналізу в освітній процес. **Основною задачею** було розробити та експериментально апробувати методику викладання основ фрактального аналізу та його застосувань для

характеристики структури та властивостей матеріалів у рамках навчальних дисциплін для студентів-фізиків.

Виклад основного матеріалу дослідження. В рамках навчання студентів-фізиків на бакалаврському рівні було впроваджено нову дисципліну на вибір «Основи методу фрактального аналізу програмними засобами»[5], для студентів магістратури – запропоновано тему для науково-дослідної практики, на базах партнерських організацій: ІЕЗ ім. Е.О. Патона НАН України [6] та ТОВ «ПлазмаТек» [7] та дисертацій магістрів [8], а також продовження даного напрямку досліджень на наступному рівні навчання – на аспірантурі на базі ІЕЗ ім. Е.О. Патона НАН України. В межах дисципліни та фрактальних тематик у студентів формуються наступні компетентності:

Інформаційні:

✓ *Компетентність у математичному моделюванні складних систем.* Здатність застосовувати апарат фрактальної геометрії для кількісного опису нерегулярних, хаотичних структур і процесів у матеріалах та переходити для опису фізичних моделей від евклідових розмірностей до фрактальних.

✓ *Компетентність у цифровому аналізі зображень,* тут поєднуються фізика із інформаційними технологіями. Здатність використовувати сучасне програмне забезпечення (Photoshop, Fractal, ImageJ, MatLab, Python) для обробки та аналізу цифрових зображень мікроструктур матеріалів, отриманих за допомогою оптичної та електронної мікроскопії (SEM, TEM). Навички виділення структурної інформації (наприклад, контурів, меж зерен, дефектів, включень, інокуляторів) та застосування до неї фрактальних алгоритмів (метод «box-counting method»).

✓ *Компетентність у встановленні зв'язку «Структура-Властивість» (аналіз),* тут поєднуються матеріалознавство та фізика. Здатність інтерпрету-

вати фізичний зміст фрактальних характеристик, наприклад фрактальної розмірності, у контексті макроскопічних властивостей матеріалів, наприклад, твердості, ударної в'язкості, границь плинності і текучості, характеристик повздовжнього видовження та поперечного звуження. Вміння використовувати фрактальний індекс як прогностичний параметр для оцінки експлуатаційних характеристик матеріалів.

Загальнонаукові:

✓ *Навички критичного аналізу та синтезу наукової інформації.* Здатність критично оцінювати обмеження класичних фізичних моделей та необхідність застосування фрактального підходу. Вміння синтезувати знання з інших галузей: математика, програмування/інформаційні технології, матеріалознавство, фізика загальна та фізика твердого тіла, для розв'язання прикладних наукових задач.

Застосування фрактального аналізу відбувається на реальних об'єктах, що дає здобувачам більшої впевненості в їх затребуваності. При співпраці з ТОВ «ПлазмаТек» в дослідженні використовується сталь ХВГ; з ІЕЗ ім. С.О. Патона НАН України робота відбувається на базі низьколегованих сталей 09Г2, 09Г2С, а саме дослідження зварних швів із цих сталей.

Зварні металоконструкції широко використовуються в багатьох галузях промисловості та будівництві. Здатність працювати у відповідних умовах, надійність та довговічність таких конструкцій забезпечується формування певної структури металу зварних швів та зони термічного впливу основного металу. Сучасні методи металографічних досліджень, які використовуються для визначення параметрів структури з метою контролю показників якості металу, такі як, наприклад, ДСТУ 8972-2019, ДСТУ 8966-2019, ДСТУ 3295-2095, орієнтуються на ідеалізоване зображення структурних складових. Реальні складові структури можуть мати значні відхилення від ідеалізованої форми. Такі параметри як гольчатість структурних зерен, морфологія неметалевих включень мають суттєвий вплив на механічні властивості металу. Крім того доводиться аналізувати об'єкти, що мають різну розмірність, наприклад розміри зерен (мм), розгалуженість між зеренних границь (мм^{-1}), відношення довжини до ширини зерна (безрозмірний показник), орієнтація структурних зерен (кут), вміст неметалевих включень (%). Природні об'єкти, взагалі як правило, є нерівними та погано описуються ідеальними конструкціями евклідової геометрії. Прості системи з нелінійною динамікою часто генерують дуже випадкові ефекти, відомі як хаос. Парадокс хаосу полягає в тому, що він детермінований, тобто є результатом динаміки, яка не регулюється законами ймовірності. Через надзвичайну чутливість до початкових умов і параметрів системи хаотична система може здаватися абсолютно випадковою. Але в основі такої поведінки лежить порядок, який може бути описаний статистичними методами. Одним з таких методів є метод фрактального аналізу, що набув поширення останнім часом в металографічних дослідженнях як металів взагалі, так і зварних з'єднань зокрема [9-12].

Термін фрактал (від латинського fractus – неправильний, фрагментований) застосовується до об'єктів у просторі або коливаний у часі, які мають форму са-

моподібності та не можуть бути описані в межах однієї абсолютної шкали вимірювання. Фрактали виглядають як природні поверхні, і справді, базові фізичні процеси (від агрегації галактик, через турбулентні потоки лави, до згортання сиру та зростання сніжнок), які змінюють форму через локальну дію, створюють фрактальні поверхні, тому фрактали поширені в природі [13]. Такі ідеальні об'єкти як точки мають евклідову розмірність 0, ідеальні лінії – 1, а ідеально плоскі площини – 2. Однак, сукупність дійсних точок має розмірність більше 0, дійсні лінії більше 1, дійсні поверхні більше 2 тощо. На кожному рівні, зі зміною розмірів об'єкта від одного цілого числа до наступного, складність об'єкта збільшується; він стає більш заповнюючим площу від 1 до 2, більш заповнюючим об'єм від 2 до 3 тощо. Евклідові або нефрактальні об'єкти (точки, лінії, кола, куби тощо) можна розглядати як фрактальні об'єкти з найнижчою складністю (цілочисельні фрактальні розмірності) у відповідних областях розмірності (від 0 до 1, від 1 до 2 тощо). Фрактальна геометрія допускає існування мір, які змінюються нецілим або дробовим чином, коли змінюється одиниця вимірювання. Керівний показник D називається фрактальною розмірністю. Фрактальна розмірність – це міра того, наскільки «складною» є аналізована фігура. У грубому сенсі вона вимірює, «скільки точок» лежить у заданій множині.

Одним із найважливіших практичних аспектів фрактального аналізу може бути використання фрактальної розмірності як кількісної змінної, яку можливо розглядати як залежну змінну для оцінювання багатьох незалежних змінних. Фактично, формальне визначення фрактала говорить, що це об'єкт, для якого фрактальна розмірність більша за топологічну розмірність тобто фрактал – це об'єкт, що складається з частин, подібних до цілого. Поняття самоподібності є основною властивістю фрактальних об'єктів.

Навіть у, здавалося б, повністю невпорядкованих системах, таких як структура металу зварних швів, ми можемо спостерігати статистичну самоподібність (повторення характерних локальних структур та певних типових кореляцій між ними). Це найхарактерніша риса самоподібності: фундаментальна інформація про структуру складної системи вже міститься у досить малих вибірках, і ми можемо відтворити всі суттєві характеристики, навіть якщо вони не є строго ідентичними [14].

Використання самоподібності – це один із способів обчислення фрактальної розмірності. Наприклад, можна розділити відрізок прямої на m самоподібних інтервалів, кожен з яких має однакову довжину, і кожен з яких можна збільшити в n разів, щоб отримати вихідний відрізок. Квадрат або трикутник можна розділити на n^2 самоподібних копій себе, кожна з яких потрібно збільшити в n разів, щоб отримати вихідний об'єкт. Аналогічно, куб можна розкласти на n^3 самоподібних копій себе, кожна з яких потрібно збільшити в n разів, щоб отримати вихідний куб. Якщо взяти збільшення n та піднести його до степеня розмірності D , то отримаємо кількість самоподібних частин у вихідному об'єкті P :

$$P = n^D.$$

Слід підкреслити, що D є описовим, кількісним показником статистики.

Фрактальний аналіз став важливою класифікаційною методологією для об'єктивної характеристики та розрізнення структурних складових металу. Загальний підхід такої діагностичної схеми такий: 1-й – характеризувати структурну складову за кількома ознаками, чисельно описуючи деякі або всі фактори, що суб'єктивно розглядаються металознавцями, та 2-й – зробити висновок на основі цих ознак щодо віднесення цієї складової до встановленого класифікаційного типу.

Оцифроване зображення – це візерунок, що зберігається у вигляді матриці даних. Бінарні зображення – це матриці, де пікселі, що належать до візерунка, зберігаються як 1, а пікселі фону – як 0. На відеоекрані пікселі з 1 відображаються як чорні, пікселі з 0 – як білі або навпаки. Зображення у градаціях сірого – це матриці, де елементи матриці можуть приймати значення від 0 до 255. Для цього методу спочатку підраховують чорні (або, відповідно, білі) пікселі в рядку, а потім, використовуючи загальну кількість пікселів у рядку, нормалізують отримане число. У зображенні зі значеннями сірого обчислюється сума значень сірого і нормалізуються числа, використовуючи найбільше значення сірого. Скануючи зображення рядок за рядком встановлюється стохастичний сигнал, що містить інформацію про зображення.

Для визначення фракталів структурних складових металів використовують фрактал типу «комірка». Логарифм розміру комірки (зазвичай у піксельних одиницях) відкладається на горизонтальній осі, а логарифмічна загальна площа комірок, що містять принаймні один піксель, що належить до розглянутого фрактала, відкладається на вертикальній осі. За результатами аналізу підраховують кількість комірок, які не є порожніми, тобто кожної комірки, яка містить принаймні один піксель розглянутого фрактала. Нехай кількість цих комірок буде P . Зменшення розміру комірки h дає більше деталей, що те саме, що збільшення збільшення. Фактично, збільшення, n , дорівнює $1/h$. Фрактальну розмірність визначають за виразом:

$$D = \frac{\log \log(P)}{\log \log(1/h)}$$

Однією з основних характеристик структури металу є розмір її зерен, який можливо описати через розмір границь зерен. В цьому випадку розмір сторони в пікселях стає одиницею довжини. Такий метод іноді називають методом підрахунку блоків. Через фрактальну самоподібність у методах, пов'язаних з довжиною, величина результуючої міри (периметрів тощо) збільшується зі зменшенням розміру вимірювального елемента (комірки).

Відповідне степеневе співвідношення:

$$L(h) = Fh^s,$$

де $L(h)$ – еквівалентний периметр як функція роздільної здатності, F – префактор, а s – нахил графіка залежності $\log[L(h)]$ від $\log(h)$. Тоді *фрактальна розмірність довжини* $D = 1 - s$. Оскільки s від'ємне, а $|s|$ менше за 1, D знаходиться між 1 та 2 [15].

Окрім підходу, який пов'язано з довжиною, для аналізу структурних складових використовують методи, пов'язані з масою [15]. Масово-орієнтовані методи передбачають підрахунок пікселів на границях, що містяться в області вибірки (наприклад, зерна структури,

або неметалеві включення), як функцію розмірів областей вибірки. Центрують комірки у багатьох випадково розташованих точках на границі та підраховують кількість пікселів на границі, що містяться в кожній комірці. Лагарифм кількості пікселів у кожній комірці відображається на основі логарифма вимірювального елемента (довжина границі). Фрактальна модель дає лінію з позитивним нахилом, що є D для цього об'єкта. Побудована степенева залежність має вигляд:

$$\mu(r) = Ar^D,$$

де $\mu(r)$ – кількість пікселів (маса) у комірці розміром r ; r – довжина сторони комірки, A – префактор, D – нахил графіка залежності $\log[\mu(r)]$ від $\log(r)$, а D – фрактальна розмірність маси [15].

Мета вимірювання фрактальних розмірностей полягає не лише в додаванні нового структурного параметра до вже існуючих, важливішою метою є отримання глибшого розуміння розвитку складних структур та процесів, що сприяють формуванню структур. Однією з переваг фрактального аналізу є здатність описувати нерегулярні та складні об'єкти.

Структура металу взагалі, і металу зварного з'єднання зокрема, є дуже структурно не однорідними та мають обмежені, а часто й змінні, діапазони самоподібності. Задане значення фрактальної розмірності, D , не визначає однозначно структурну морфологію, і об'єкти, що виглядають дуже по-різному, можуть мати однакову або дуже схожу D . Щоб відрізнити такі об'єкти від «традиційної» міри фрактальної розмірності, пов'язаної з довжиною та ємністю, можна додати новіші міри фрактальної розмірності, пов'язаної з масою, та лакуарності, а також поняття мультифракталу.

Лакуарність (від латинського *lacuna* – брак, проміжок або діра) вимірює структурну варіацію або неоднорідності, які можуть проявлятися «текстурою». Лакуарність є аналогом фрактальної розмірності, яка описує текстуру фрактала. Вона тісно пов'язана з розподілом розмірів незаповнених пікселями площин на фракталі. Грубо кажучи, якщо фрактал має великі білі зерна оторочені чорними границями або неметалеві включення, він має високу лакуарність, тому лакуарність можливо розглядати як міру неоднорідності (гетерогенності) структури або ступінь структурної дисперсії в межах об'єкта. Лакуарність зазвичай визначається з точки зору розподілу, пов'язаного з масою. Загальною процедурою є обчислення середнього значення та дисперсії (або стандартного відхилення) деякої міри, наприклад, маси (кількості пікселів) у комірці заданого розміру. Отже, лакуарність можна інтерпретувати як функцію морфології об'єкту (структурного зерна або неметалевого включення).

Фрактальні моделі можуть бути використані для сегментації зображень, класифікації структур, визначення морфології форми об'єктів зображення [16], але жоден окремий параметр не може повністю описати фрактальну структури металів. З одного боку фрактальна розмірність є статистичною мірою цілого об'єкта, тому що вона представляє міру його глобальної складності і, отже, демонструє фрактальні властивості об'єкта в цілому. З іншого боку, локальна фрактальна розмірність представляє складність та фрактальні властивості різних локусів всередині об'єкта, наприклад, розмірів структурних зерен [17] або неме-

талевих включень [18]. У певному сенсі це сутність мультифракталів, а саме те, що об'єкти можуть мати глобальні та різні локальні фрактальні розмірності і, отже, локальні відмінності в складності [19].

Висновок. Фрактальний аналіз є фундаментальним математичним апаратом, що застосовується для опису складних, нерегулярних об'єктів і процесів у різних галузях фізики (фізика твердого тіла, фізика руйнування, фізика поверхонь тощо), що вимагає оновлення змісту освіти для забезпечення міждисциплінарної підготовки. У цій статті продемонстровано, наскільки корисним є впровадження фрактального аналізу як інструменту для отримання структурної інформації з оцифрованих зображень при проведенні металографічних досліджень структури металу взагалі і зварних з'єднань зокрема. Дослідження пропонує нову педагогічну модель для інтеграції складної математичної теорії в прикладну фізику, що є важливим внеском у теорію та методику навчання фізики у вищій школі.

Список використаних джерел:

1. Силабус навчальної дисципліни фрактали [Електронний ресурс]. Івано-Франківськ, 2024. URL: <https://surl.li/sbnpag> (дата звернення: 04.11.2025).
2. Силабус навчальної дисципліни «Фрактальна геометрія і теорія хаосу для квантових систем» [Електронний ресурс]. Одеса: ОДЕКУ. URL: <https://surl.lt/anrjtj> (дата звернення: 04.11.2025).
3. Силабус навчальної дисципліни «Сучасні методи обробки інформації» [Електронний ресурс]. Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка». URL: <https://surl.li/dnbkxj> (дата звернення: 04.11.2025).
4. Боровик Л., Басараба І., Боровик О. Структурно-функціональний аналіз загальнонаукової компетентності здобувачів вищої освіти. *Науковий вісник Вінницької академії безперервної освіти. Серія «Педагогіка. Психологія»*. 2024. Вип. 5. С. 17–25. DOI: <https://doi.org/10.32782/academ-ped.psyh-2024-1.03>
5. Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус) «Основи методу фрактального аналізу програмними засобами» [Електронний ресурс]. URL: <https://surl.li/mhqvnm> (дата звернення: 04.11.2025).
6. Договір про співпрацю та співробітництво ІЕЗ ім. Є.О. Патона НАН України [Електронний ресурс]. URL: <https://surl.li/ujqhns> (дата звернення: 04.11.2025).
7. Договір про співпрацю та співробітництво ТОВ «ПлазмаТек» [Електронний ресурс]. URL: <https://surl.li/ewnftr> (дата звернення: 04.11.2025).
8. Короленко Д.Ю. Застосування фрактального аналізу як одного із методів дослідження металевих конструкцій: магістерська дис.: 104 Фізика та астрономія. Київ, 2022. 85 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/8b23c823-4cd5-4ce4-8ad6-4ab0e8094d80/content>
9. Большаков В.І., Волчук В.М., Дубров Ю.І. Топологічні і фрактальні інваріанти структури для оцінювання якості металу. *Доповіді Національної академії наук України*. 2017. № 4. С. 42–47.
10. Щолокова М.О., Слободян С.Б., Дирда В.І. Фрактальний підхід до механіки руйнування твердих тіл. *Геотехнічна механіка*. 2018. № 138. С. 227–258.
11. Усов В.В., Рабкіна М.Д., Шкатуляк Н.М., Чернева Т.С. Фрактальна розмірність меж зерен і механічні властивості металу кисневих балонів. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2014. № 4. С. 117–124.
12. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Terentjev V.F. Using multifractal information for quantitative evaluation of broken symmetries of materials structures. *Materials Science* (Kaunas). 1999. № 2. P. 62–65.
13. Vicsek T. *Fractal Growth Phenomena*. Singapore: World Scientific, 1999.
14. Большаков В.І., Волчук В.М., Дубров Ю.І. *Основи організації фрактального моделювання*. Київ: Академперіодика, 2017. 170 с.
15. Smith Jr.T.G., Lange G.D., Marks W.B. Fractal methods and results in cellular morphology – dimensions, lacunarity and multifractals. *J. Neurosci. Meth.* 1996. Vol. 69. P. 123–136.
16. Pentland A.P. Fractal-Based Description of Natural Scenes. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intel.* 1984. Vol. PAMI-6 (6). P. 661–674.
17. Головка В.В., Штофель О.О., Костін В.А. Фрактальна параметризація розгалуженості бейнітної структури металу швів високоміцних низьколегованих сталей. *Автоматичне зварювання*. 2023. № 4. С. 17–20. DOI: <https://doi.org/10.37434/as2023.04.03>
18. Holovko V., Shtofel O., Krasikova I., Krasikov I. Fractal analysis of the structure with non-metallic inclusions characteristics impact on the weld metal mechanical properties. *8th International Materials Science Conference HighMatTech-2023*. October 2–6, 2023 Kyiv, Ukraine [Електронний ресурс]. URL: <https://umrs.org.ua/activities/conferences/highmattech-2023/program/view/>
19. Bartlett M.L. Comparison of methods for measuring fractal dimension. *Austral. Phys. Eng. Sci. Med.* 1991. Vol. 14 (3). P. 146–152.

**Olga SHTOFEL¹, Viktor HOLOVKO²,
Danilo KOROLENKO³, Sofiia MARKOVSKA⁴,
Yuliia BONDARENKO⁵**

^{1, 4, 5}Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute

^{1, 2, 3}E.O. Paton Electric Welding Institute

FORMATION OF INTERDISCIPLINARY COMPETENCIES OF PHYSICS STUDENTS THROUGH THE APPLICATION OF FRACTAL ANALYSIS IN MATERIALS SCIENCE

Abstract. Traditional methods of materials science are often insufficient for accurate and complete characterization of complex, scale-invariant structures of natural and synthetic objects. This problem complicates the understanding of the relationships between the structural features of materials and their physical properties. The aim of this work is to develop and implement a methodology for forming interdisciplinary competencies in physics students by integrating fractal analysis as a powerful research tool. The fractal approach provides new tools for identifying deep order and regularities in complex, seemingly chaotic structures, which is critical for modern materials research. The significance lies in providing physics students with practical experience in applying advanced mathematical methods to analyze the structural components of materials, study their behaviour under the influence of various factors, and predict their properties. This not only deepens their knowledge of materials science, but also develops the analytical and research skills necessary for interdisciplinary scientific activity.

Key words: physics, mathematical approach, fractal analysis, materials science, interdisciplinary competencies, scale invariance, structure of materials.

References:

1. Syllabus navchal'noyi dystsypliny fraktaly [Elektronnyy resurs]. Ivano-Frankiv's'k, 2024. URL: <https://surl.li/sbnpag>.

2. Syllabus navchal'noyi dystsypliny «Fraktal'na heometriya i teoriya khaosu dlya kvantovykh system» [Elektronnyy resurs]. Odesa: ODEKU. URL: <https://surl.lt/anrjtj>
3. Syllabus navchal'noyi dystsypliny «Suchasni metody obrobky informatsiyi» [Elektronnyy resurs]. Dnipro: NTU «Dniprov's'ka politekhnika». URL: <https://surl.li/dnbkxj>
4. Borovyk L., Basaraba I., Borovyk O. Strukturno-funktsional'nyy analiz zahal'nonaukovoyi kompetentnosti zdobuvachiv vyshchoyi osvity. *Naukovyy visnyk Vinnyts'koyi akademiyi bezpererвної osvity. Seriya «Pedahohika. Psykholohiya»*. 2024. Vyp. 5. S. 17–25. DOI: <https://doi.org/10.32782/atsadem-ped.psyh-2024-1.03>
5. Robocha prohrama navchal'noyi dystsypliny (Syllabus) «Osnovy metodu fraktal'noho analizu prohramnyy zasobamy» [Elektronnyy resurs]. URL: <https://surl.li/mhqvnm>
6. Dohovir pro spivpratsyu ta spivrobitnytstvo IEZ im. Ye.O. Patona NAN Ukrayiny [Elektronnyy resurs]. URL: <https://surl.li/tujqhs>
7. Dohovir pro spivpratsyu ta spivrobitnytstvo TOV «PlazmaTek» [Elektronnyy resurs]. URL: <https://surl.li/ewnftr>
8. Korolenko D.Yu. Zastosuvannya fraktal'noho analizu yak odnogo iz metodiv doslidzhennya metalevykh konstruksiy: mahisters'ka dys.: 104 Fyzyka ta astronomiya. Kyiv, 2022. 85 s. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/tstore/bitstreams/8b23ts823-4tsd5-4tse4-8ad6-4ab0e8094d80/tcontent>
9. Bol'shakov V.I., Volchuk V.M., Dubrov Yu.I. Topolohichni i fraktal'ni invarianty struktury dlya otsinyuvannya yakosti metalu. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny*. 2017. № 4. S. 42–47.
10. Shchholokova M.O., Slobodyan S.B., Dyrda V.I. Fraktal'nyy pidkhid do mekhaniky ruynuannya tverdykh til. *Heotekhnichna mekhanika*. 2018. № 138. S. 227–258.
11. Usov V.V., Rabkina M.D., Shkatulyak N.M., Cherneva T.S. Fraktal'na rozmirmist' mezh zeren i mekhanichni vlastyosti metalu kysnevykh baloniv. *Fyzyko-khimichna mekhanika materialiv*. 2014. № 4. S. 117–124.
12. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Terentjev V.F. Using multifratstal information for quantitative evaluation of broken symmetries of materials strutures. *Materials Ssientse* (Kaunas). 1999. № 2. P. 62–65.
13. Vitssek T. Fractal Growth Phenomena. Singapore: World Stsientifits, 1999.
14. Bol'shakov V.I., Volchuk V.M., Dubrov Yu.I. Osnovy orh-anizatsiyi fraktal'noho modelyuvannya. Kyiv: Akademperiodyka, 2017. 170 s.
15. Smith Jr.T.G., Lange G.D., Marks W.B. Fractal methods and results in tsellular morphology – dimensions, latsunarity and multifratstals. *J. Neurotsi. Meth.* 1996. Vol. 69. P. 123–136.
16. Pentland A.P. Fractal-Based Destsription of Natural Stsenes. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intel.* 1984. Vol. PAMI-6 (6). P. 661–674.
17. Holovko V.V., Shtofel' O.O., Kostin V.A. Fraktal'na parametryzatsiya roz'haluzhenosti beynitnoyi struktury metalu shviv vysokomitsnykh nyz'kolehovanykh staley. *Avtomatychno zvaryuvannya*. 2023. № 4. S. 17–20. DOI: <https://doi.org/10.37434/as2023.04.03>
18. Holovko V., Shtofel O., Krasikova I., Krasikov I. Fractal analysis of the strutsture with non-metallits intslusions charatsteristits impatst on the weld metal mechanitsal properties. *8th International Materials Ssientse Tsonferentse HighMatTech-2023*. Otstober 2–6, 2023 Kyiv, Ukraine [Elektronnyy resurs]. URL: <https://umrs.org.ua/atstivities/tsonferentse/highmattech-2023/program/view/>
19. Bartlett M. L. Tsomparison of methods for measuring fratstal dimension. *Austral. Phys. Eng. Stsi. Med.* 1991. Vol. 14 (3). P. 146–152.

Отримано: 11.11.2025